# Modelação Numérica do Punçoamento em lajes fungiformes - Estado da Arte

Nuno F. Silva Mamede

Relatório 1

FLAT - Comportamento de Lajes Fungiformes Sujeitas a Acções Cíclicas e Sísmicas

(PTDC/ECM/114492/2009)

Outubro de 2013

# 1. Introdução

Nas últimas décadas assistiu-se ao colapso de alguns edifícios, ou parte destes, com estruturas constituídas por lajes do tipo fungiformes, o que suscitou um maior interesse dos engenheiros para o fenómeno da rotura por punçoamento.

Na 2000 Commonwealth Avenue, em Boston, dois terços de um edifício de apartamentos com 16 pisos ruiu, decorria o ano de 1971. O edifício começou a ser construído em 1969 e no momento do colapso a construção estava em fase de conclusão. Este acidente, segundo King e Delatte [1], teve origem na rotura por punçoamento de um dos pilares que suportava a laje de cobertura, decorrendo nesse momento a betonagem da laje da casa das máquinas situada acima da zona do pilar. O aumento da carga nos pilares adjacentes levou ao colapso da laje de cobertura. Em apenas 20 minutos o edifício que ruiu e a planta. O núcleo do elevador e a parte do edifício que ruiu serviram de refúgio para alguns trabalhadores que se encontravam nas imediações, na fase inicial do colapso. Resultaram deste acidente 4 mortos. Nas investigações posteriores descobriu-se que o projeto não estava de acordo com as normas em vigor na época e, entre outras causas, a resistência do betão não atingia a mínima especificada no projeto, e as cofragens foram retiradas prematuramente.

Em Março de 1981, um edifício residencial, Harbour Cay Condominium, localizado em Cocoa Beach, Florida, ruiu. Onze trabalhadores morreram e vinte e três ficaram feridos. O edifício estava ainda em fase de construção e caracterizava-se por ter 5 pisos em laje fungiforme. Delatte [2] indica que o colapso se iniciou na laje de cobertura, devido ao punçoamento, levando a estrutura ao colapso progressivo. Das investigações resultou que, não foi efetuado qualquer tipo de cálculo de verificação da resistência ao punçoamento da laje de cobertura, a espessura dessa laje apenas tinha 203 mm, quando os regulamentos indicavam uma espessura mínima de 280 mm, e a armadura longitudinal superior foi colocada de forma anormal, em que a altura útil da laje foi reduzida de 160 mm para 135 mm. Na figura 2 apresenta-se o edifício antes e após o colapso.

A ala norte do Sampoong Department Store em Seul, Coreia do Norte, desabou ferindo cerca de 1000 pessoas e matando 500, decorria o ano de 1995 (figura 3). Um dos mais trágicos acidentes que se tem registo. Originalmente foi projetado para um edifício de escritórios com 4 pisos em laje fungiforme, mas alterado para um centro comercial, ainda durante a fase de construção. Posteriormente, o edifício foi aumentado em um piso, para a instalação de uma pista de patinagem. Segundo Gardner *et al.* [3], a redução das secções dos pilares que suportavam o quinto piso e a cobertura, a alteração da funcionalidade desse piso para restauração e a movimentação incorreta da torre do ar condicionado foram, entre outras, as principais causas para ocorrência do sucedido. O colapso originou-se, por punçoamento, num pilar interior que suportava a cobertura e, em apenas 20 segundos, a estrutura entrou em colapso progressivo ruindo até ao nível das fundações. Este acidente ficou ligado à corrupção, ao permanente ignorar do dono da obra a que o edifício não estava preparado para as alterações desejadas (fase de construção) e, dias antes do colapso, ao ignorar dos avisos dados pelos peritos que após inspeção previam um colapso do edifício.



**Figura 1** – Escombros do acidente e planta do edifício, zona sombreada corresponde à parte que desmoronou, na 2000 Commonwealth Avenue, King e Delatte [1].



Figura 2 – Harbour Cay Condominium antes e após o colapso, Delatte [2].



Figura 3- Destroços do Sampoong Department store, Gardner et al. [3].

Na figura 4 pode observar-se no que resultou o colapso parcial da laje de topo do Pipers Row Car Park, Wolverhampton, como relatou Wood [4]. O edifício fora construído em 1965 e submetido a várias inspecções e reparações. Em Março de 1997, junto a um dos pilares que suportava a laje do topo deu-se a rotura por punçoamento a que se seguiram mais oito pilares adjacentes. O acidente ocorreu durante a noite, pelo que o parque se encontrava vazio, não havendo assim grandes danos a registar nem perda de vidas humanas. As causas do acidente foram identificadas com o baixo recobrimento das armaduras que provocou a corrosão destas, a fraca qualidade do betão e forte deterioração deste, uma vez que no Inverno era usado sal para o degelo da neve.



Figura 4 – Pipers Row Car Park após colapso da laje do topo, Wood [4].

No ano de 2004, um colapso catastrófico ocorreu num parque de estacionamento subterrâneo em Gretzenbach, Suiça. Segundo Ruiz *et al.* [5], noventa minutos após o início de um incêndio no interior do parque, deu-se a rotura por punçoamento, num pilar que de imediato se alastrou a vários, levando ao desmoronamento de grande parte da estrutura, como se pode observar na figura 5. Registaram-se sete mortos, bombeiros que no momento se encontravam no interior a combater as chamas. Das causas associadas a este colapso o fogo foi o menos significativo. O sobre carregamento da estrutura, colocação de uma camada de solo superior ao esperado, e uma abordagem grosseira no modo como verificaram a capacidade resistente ao punçoamento, foram as principais causas do acidente.



Figura 5 – Parque de estacionamento subterrâneo de Gretzenbach após colapso. Ruiz et al. [5].

Através da investigação dos erros associados a estes e a outros acidentes, engenheiros procuraram estudar e compreender o punçoamento de forma a evitar futuras lacunas, quer a nível de projecto, construção e manutenção de edifícios.

Em 1913, por Talbot [6], foram publicados os primeiros estudos experimentais do fenómeno, mas apenas em pilares e paredes que incidiam sobre elementos de fundação. Mais recentemente, a partir da década de 80, começaram a surgir ensaios numéricos baseados em elementos finitos que possibilitaram ensaiar e compreender o punçoamento, atingindo-se resultados próximos dos experimentais e previstos em normas.

Nos tópicos seguintes faz-se uma breve descrição sobre o mecanismo de rotura ao punçoamento e descrevem-se alguns modelos numéricos desenvolvidos por diversos autores. No final do capítulo apresentam-se as normas que foram usadas para se fazer a comparação dos resultados numéricos com a sua previsão.

# 2. Rotura ao Punçoamento

A rotura por punçoamento origina-se quando os esforços atuantes num elemento, nomeadamente momentos fletores e esforço transverso, se têm que transferir para outro numa pequena área. No caso das lajes fungiformes este fenómeno acontece quando elevados esforços se têm que transferir da laje para o pilar, originando elevadas tensões na zona circundante do pilar onde se inicia o processo de fendilhação que poderá levar à rotura da laje.

O punçoamento caracteriza-se como fenómeno de rotura local, no entanto, quando se perde um ponto de equilíbrio leva-se ao aumento dos esforços nos elementos de suporte vizinhos, podendo levar a estrutura ao colapso progressivo. A rotura caracteriza-se por ser repentina e sem ductilidade, ou seja, rotura do tipo frágil. Resultando do fenómeno um mecanismo de rotura tronco-cónico em que o pilar e a laje se desligam um do outro, como se pode observar na figura 6.



Figura 6- Esquema de rotura ao punçoamento de uma laje de betão armado, Ramos [7].

A rotura por punçoamento, em lajes fungiformes, pode ser caracterizada em quatro fases, onde a fendilhação toma o papel principal para as definir. As fases são as seguintes:

#### Fase elástica-linear:

O betão e o aço apresentam comportamento elástico-linear, as armaduras não cederam nem se formou qualquer tipo de fenda.

#### Fase de resposta à flexão:

O aparecimento da primeira fenda à flexão marca o início desta fase. Localizam-se na face superior da laje, são tangenciais ao pilar e contornam todo o seu perímetro. Com o aumento das solicitações surgem fendas radiais em torno do pilar, estas podem prolongar-se até à extremidade da laje. Na figura 7 identificam-se os tipos de fendas no fenómeno do punçoamento.

### Fase de resistência ao corte:

Nesta fase a fendilhação origina-se desde a parte inferior da laje até ao topo resultando em fendas inclinadas, onde se forma um mecanismo tronco-cónico. Quando as fendas atingem uma certa abertura dá-se a rotura por punçoamento. Na figura 7 é identificada um exemplo de fenda de corte, zona pela qual se dará a rotura.



Figura 7 – Tipos de fendilhação presente no fenómeno do punçoamento. Adaptado de Ramos [8].

#### Fase de pós-rotura ao punçoamento:

Na fase de pós-rotura ao punçoamento a laje fica unida apenas pela armadura longitudinal de flexão uma vez que já se encontra dividida em duas partes distintas.

Estas fases foram identificadas em ensaios documentados. Note-se que a transição entre a fase de resposta à flexão e a fase de resistência ao corte nem sempre é evidente.

# 3. Modelos Numéricos

## 3.1 Beutel e Hegger, 1998 [9]

Os modelos foram simulados através do *software* MASA, Macroscopic Space Analysis, por Beutel e Hegger [9], caracterizaram-se por possuírem armadura específica de punçoamento, na forma de estribos. O objetivo destes autores era, através da análise numérica, investigar o tipo de rotura nos modelos, podendo ser junto à face do pilar, na zona interior dos estribos ou na zona exterior à armadura de punçoamento, como se ilustra na figura 8.



Figura 8 – Tipos de rotura devido ao punçoamento. Adaptado de FIB - Bulletin 12 [10].

Foi estudado o punçoamento em pilares interiores, sendo que os modelos experimentais se prolongavam desde o pilar até à zona de momentos nulos e tinham forma hexagonal. O suporte era garantido por 12 tirantes e a carga aplicada por um macaco hidráulico.

De forma a simplificar o problema, ao utilizar a simetria do modelo, foi apenas modelado ¼ de laje e para simular o betão recorreu-se a elementos de 8 nós – elementos *brick*. Tanto a armadura longitudinal como os vários tipos de estribos estudados foram modelados com recurso a elementos barra. Na figura 9 apresentam-se os quatro tipos de estribos estudados por Beutel e Hegger [9].

Uma vez realizados os ensaios apenas o estribo do tipo d) da figura 9 apresentou um comportamento semelhante ao real.

Os dados adquiridos desta análise numérica foram comparados com os dados provenientes da análise experimental em laboratório, em que, a rotura ocorreu de forma semelhante.

Na rotura através da zona interior dos estribos os modelos tiveram uma resposta inicial mais rígida na análise numérica do que nos testes laboratoriais. Na rotura os modelos numéricos apenas atingiram 90% da carga de rotura dos modelos experimentais. Tal facto foi justificado pela não contribuição da armadura longitudinal para o efeito de ferrolho, no cone de punçoamento. Da comparação, entre os esforços na armadura de punçoamento da modelação numérica e experimental, concluiu-se que teve uma excelente correspondência.



Figura 9 – Tipos armadura específica de punçoamento, por Beutel e Hegger [9].

A rotura junto à face do pilar tem duas formas possíveis, uma é a Semi-dúctil, que ocorre com cargas baixas e a armadura de punçoamento se encontra a uma distância do pilar superior a (0,5 a 0,7)*d*. A outra é a rotura frágil, que ocorre quando se dá o esmagamento do betão na zona comprimida, junto ao pilar, para níveis de carga elevados. Este tipo de rotura ocorre sem que as armaduras, longitudinal e ao punçoamento, cedam. Neste tipo de rotura, os autores, concluíram através da análise dos resultados, que o efeito de ferrolho não foi contabilizado na simulação numérica e, existiram maiores diferenças nos resultados comparados, em relação aos resultados provenientes da rotura, na zona interior da armadura de punçoamento.

Na rotura pela zona exterior ao punçoamento, Beutel e Hegger [9], ao variarem o número de linhas de estribos, concluíram que este tipo de rotura apenas ocorria para armaduras de punçoamento compostas por menos de três linhas de estribos. Referiram, ainda que, para se obter um considerável aumento da resistência ao punçoamento, através da colocação de estribos, deve instalar-se mais do que duas camadas de estribos, visto que o emprego de estribos em apenas duas camadas teve um aumento muito pouco significativo na resistência que se destinavam a promover.

Após verificar os modos de rotura no MASA, os autores, realizaram um estudo paramétrico. Neste estudo todos os modelos tiveram rotura junto à face do pilar, por esmagamento do betão. E, foram estudadas as distâncias entre o primeiro estribo e a face do pilar, distâncias entre duas linhas de estribos e a influência da percentagem de armadura longitudinal, na produção de diferentes modelos de escoras e tirantes.

Observou-se que para se obter uma carga máxima, no que respeita ao punçoamento, o primeiro estribo deve estar colocado a uma distância 0,8*d* da face do pilar. Ao analisarem as distâncias entre estribos, recomendaram que estes devem de ser colocados a uma distância de 0,75*d*, entre si. Ao observarem os modelos de escoras e tirantes resultantes das armaduras e estribos, concluíram que ao se providenciar estribos, para qualquer distância entre eles, a resistência ao punçoamento é sempre maior que uma laje sem este tipo de armadura.

#### 3.2 Ožbolt e Vocke, 1998 [11]

De forma a verificar se os resultados alcançados através do programa computacional MASA, para o problema do punçoamento em lajes fungiformes maciças, eram de boa aproximação, Ožbolt e Vocke [11], procederam à modelação de várias lajes, que tinham sido previamente ensaiadas em laboratório e compararam os resultados obtidos. O MASA foi desenvolvido com base no *Microplane Model*, e a fendilhação caracterizava-se por ser do tipo *crack band approach*, no qual os danos são limitados a uma linha ou banda de um elemento finito.

A laje experimental era hexagonal, suportada por 12 tirantes colocados de forma simétrica e a carga era aplicada por um macaco hidráulico, até se atingir a carga de nível de serviço, descarregava-se, e finalmente carregava-se até à rotura. A laje não tinha qualquer tipo de armaduras de punçoamento.

Na análise numérica aproveitou-se os eixos de simetria e foi apenas simulado ¼ de laje, o betão foi simulado por elementos sólidos de 8 nós, havendo um refinamento da malha na zona junto ao pilar. Os varões da armadura longitudinal foram introduzidos como elementos barra com modelo de comportamento elasto-plástico. Na zona dos apoios simulados, neste caso apenas 3, os elementos finitos foram definidos com comportamento elástico linear de forma a evitar danos. Foram introduzidos os apoios necessários a simular um comportamento equivalente à simulação de toda a laje, visto se estar apenas a simular ¼ desta. A carga foi aplicada por imposição de um deslocamento vertical no centro do pilar.

Da comparação da análise numérica com a experimentação retirou-se que na rotura devido ao punçoamento, em ambos os casos, se formou um cone de punçoamento, como se ilustra na figura 10. Da observação dessa figura, foi possível verificar, que o programa MASA, previu de forma correta o cone de punçoamento na rotura do modelo. Na figura 11 apresentam-se em gráfico os valores de carga-deslocamento da análise numérica e da média dos deslocamentos lidos durante a experimentação. Ožbolt e Vocke [11] concluíram que os valores dos deslocamentos e das cargas de rotura foram muito bem estimados pelo MASA. Observaram, também, que na análise numérica o comportamento pós-rotura é mais dúctil que na experimentação, justificando este facto com as dificuldades do programa nesta fase na convergência dos cálculos, e também, porque na experimentação a carga era controlada.



Figura 10 – Comparação dos cones de punçoamento. Esquerda – Modelo numérico, Direita – ensaio laboratorial. Adoptado de FIB - Bulletin 12 [10].

Foram ainda comparados valores de extensões dos varões da armadura longitudinal à tracção, de deslocamentos para diversos patamares de carga e deformações radiais e tangenciais no betão, em zonas de compressão. Concluíram que o *software* MASA é capaz de prever realisticamente o comportamento de lajes, a este tipo de rotura.



Figura 11 – Carga-Deslocamento ensaios numéricos (analysis) e ensaios experimentais (experiment). FIB - Bulletin 12 [10].

Posteriormente, estes autores, realizaram um estudo paramétrico do fenómeno através de análise computacional e, concluíram que há parâmetros que têm uma influência muito superior que outros na rotura ao punçoamento, em lajes fungiformes. Segundo os dados adquiridos por Ožbolt e Vocke [11] estes concluíram que a energia de fratura e a percentagem de armadura longitudinal de tração têm uma grande influência na capacidade resistente ao punçoamento. Por outro lado a tensão de resistência à compressão do betão e a tensão à tração têm menor influência no fenómeno. As cargas de rotura previstas neste estudo paramétrico foram de boa previsão de acordo com as normas recomendadas, entre essas o Eurocódigo 2 [12].

#### 3.3 Markus Staller, 2000 [13]

Staller [13], estudou o fenómeno do punçoamento através de um programa computacional de elementos finitos a três dimensões denominado MARC. Os modelos eram compostos por elementos sólidos de oito nós e a armadura simulada com elementos barra. Apenas se simulou <sup>1</sup>/<sub>4</sub> de laje, devido às condições de simetria. A carga, tal como nas investigações descritas anteriormente, era imposta através de um deslocamento vertical na zona do pilar. O método Newton-Raphson foi o utilizado pelo MARC para fazer os cálculos iterativos.

A fendilhação foi abordada como *fixed crack model*, o critério de rotura assumido para o betão foi o *von Misses*, e para o aço *Drucker/Prager*. No material betão abordou-se a tensão de tração, como bilinear para se simular de forma mais apropriada o amolecimento do betão.

Staller [13] observou que os cones de punçoamento resultantes eram muito semelhantes. Os resultados da análise numérica eram próximos aos resultados experimentais, como se ilustra na

figura 12, do lado esquerdo. Staller [13] notou que, ao analisar a evolução dos deslocamentos segundo a carga (figura 12, do lado direito), a transição da fase linear para a não-linear ocorreu significativamente mais tarde do que nos modelos ensaiados em laboratório. E que a carga de rotura na analise numérica resultou em 15% superior ao que se obteve na experimentação.



Figura 12 – Cone de punçoamento no MARC (esquerda), gráfico de carga-deslocamento – modelo numérico e experimental (direita). Staller [13].

Posteriormente, Staller [13], num estudo paramétrico, variou valores de espessura de laje e da classe de resistência do betão, e manteve constantes valores de percentagem de armadura longitudinal e de espessura do recobrimento das armaduras.

Observou que a diminuição da espessura dos modelos leva a uma perda de rigidez, diminuição da carga de rotura e aumento das deformações, como se ilustra na figura 13, esquerda.

Ao estudar a influência da classe de resistência do betão, alteraram-se parâmetros como a energia de fratura,  $G_f$ , e a tensão de rotura à tração,  $f_{ctm}$ , que dependem da resistência à compressão. Na figura 13 à direita observam-se os resultados obtidos neste estudo. O aumento dos valores da classe de resistência do betão levou a que a rigidez, as cargas de rotura e os deslocamentos últimos aumentassem.



**Figura 13** – Influência da espessura da laje na resistência ao punçoamento (esquerda) e da classe de resistência do betão (direita). Staller [13].

#### 3.4 Trautwein et al, 2006 [14]

Trautwein *et al.* [14] estudaram o fenómeno do punçoamento ao modelarem três lajes, com e sem armadura de punçoamento, recorrendo ao *software* DIANA. A fendilhação foi abordada de acordo com o modelo *smeared crack concept*, mais propriamente o *Multi fixed directional crack*. O critério de rotura à compressão foi o Mohr-Coulomb com endurecimento isotrópico. O comportamento do betão, antes de fendilhar, foi assumido como linear e após fendilhar como bilinear. A energia de fratura foi definida segundo o *Model Code 90* [15]. A armadura foi assumida como embutida no betão, com a espessura definida de forma que a área fosse equivalente à soma das áreas dos varões de armadura longitudinal em cada direção, e com comportamento elasto-plástico. Os elementos foram modelados recorrendo elementos finitos de oito nós isoparamétricos. O pilar foi simulado por um elemento modelado com "betão fictício", material pré-definido do programa, e com comprimento de duas vezes a espessura da laje.

As lajes modeladas já tinham sido estudadas em laboratório por outro autor, Musse [16], e designaram-se por M1, M2 e M3. A laje M1 caracterizava-se por não possuir armadura de punçoamento, enquanto que no modelo M2 esta era constituído por 3 fiadas de armadura de punçoamento e o modelo M3 por 5 fiadas.

Na figura 14 apresentam-se o gráfico carga-deslocamento (esquerda) e a propagação das fendas e cone de punçoamento (direita). Observa-se que o gráfico carga-deslocamento apresentou uma óptima aproximação entre estudo numérico e o experimental, apesar dos deslocamentos no caso experimental terem sido maiores para uma carga inferior que nos modelos numéricos. A diferença entre as cargas de rotura numéricas e experimentais fixou-se nos 2%, sendo a experimental maior. O cone de punçoamento teve uma ótima aproximação nos dois casos, tendo a rotura ocorrido na mesma zona.



**Figura 14** – Modelo M1: gráfico carga-deslocamento (esquerda) e da cone de punçoamento e fendilhação (direita). Trautwein *et al.* [14].

O modelo M2, com 3 fiadas de armadura de punçoamento, apresentou um modo de rotura semelhante nos dois casos, exterior ao reforço. O gráfico carga-deslocamento de comparação entre os dois modos ensaiados apresentou uma aproximação razoavelmente boa, no qual a curva experimental mostrou um comportamento mais dúctil do que a numérica, em que o autor assumiu como possível causa a energia de fratura assumida. Este modelo apresentou uma diferença de 6% nas cargas últimas. Na figura 15 pode observar-se o gráfico carga-deslocamento (direita).



Figura 15 – Modelo M2: gráfico carga-deslocamento (esquerda) e da cone de punçoamento e fendilhação (direita). Trautwein *et al.* [14].

Com 5 fiadas de armadura de reforço, o modelo M5, foi o modelo em que a carga última teve a maior diferença entre o estudo experimental e numérico, no qual resultou em 9%. Na avaliação carga-deslocamento observou-se que o comportamento no modelo numérico foi mais rígido do que o experimental, após a fase inicial do carregamento, figura 16. O cone de punçoamento obtido através da análise numérica, figura 16 (direita), teve uma boa aproximação com o experimental ocorrendo a rotura em ambos na mesma zona, exterior à armadura de punçoamento.



**Figura 16** – Modelo M3: gráfico carga-deslocamento (esquerda) e do cone de punçoamento e fendilhação (direita). Trautwein *et al.* [14].

Após a realização deste trabalho, os autores concluíram que o programa computacional DIANA consegue prever de forma satisfatória os valores de carga de rotura, de deslocamentos e de mecanismos de rotura em lajes fungiformes.

## 3.5 Khalil Belakhdar, 2008 [17]

Belakhdar [17] realizou uma análise não linear de lajes fungiformes através de um programa computacional baseado em elementos finitos. Das lajes estudadas, 3 caracterizaram-se por possuir parafusos de reforço ao punçoamento e 1 laje foi modelada sem reforço, de modo a servir de laje de referência.

Aproveitando a simetria da laje, o investigador, apenas modelou <sup>1</sup>/<sub>4</sub> de laje e baseou-se no método Newton-Raphson modificado para a resolução das equações de equilíbrio das iterações incrementais, de forma a se obter convergência nas soluções. O modelo do betão à compressão foi assumido como não linear, tendo uma fase elástica até se dar a abertura da primeira fenda e, a partir daí uma fase parabólica. Quanto à resistência à tração o modelo foi tido como bilinear. O material betão foi simulado com elementos de 8 nós, também conhecido por elementos *brick*. O aço, tal como os parafusos de reforço ao punçoamento presente na maioria dos modelos, foi simulado com elementos barra e com modelo de resistência elasto-plástico perfeito. Assumiu-se a aderência entre o betão e o aço como perfeita. Na figura 17 pode ser observado um modelo com parafusos de reforço ao punçoamento e a respetiva malha do modelo.

Os modelos com parafusos de reforço ao punçoamento distinguiram-se por possuir 2, 3 e 4 fiadas deste tipo de armadura, como ilustra em planta na figura 18.



Figura 17 – Modelo com parafusos de reforço ao punçoamento. Belakhdar [17].

Os resultados obtidos na análise numérica foram de boa aproximação, prevendo de forma adequada a evolução carga-deslocamento, quando comparados com dados experimentais de lajes experimentadas em laboratório com características semelhantes, ensaiados por outro autor, Polak [18]. A relação média entre a modelação numérica e os resultados experimentais quanto à carga última resultou em 1.03 e, quanto aos deslocamentos na zona central do modelo resultou em 1.12. Verificou-se ainda que o aumento do número de fiadas dos parafusos levou ao aumento dos valores de resistência à rotura e dos deslocamentos.



Figura 18 – Planta do reforço com parafusos aplicado em cada modelo. Belakhdar [18].

Belakhdar [17], posteriormente, realizou um estudo paramétrico em que fez variar o diâmetro dos parafusos a instalar como reforço ao punçoamento.

Verificou-se que, com o aumento do diâmetro dos parafusos, ao se avaliar a curva cargadeslocamento, a influência não foi praticamente notada até se iniciar a fendilhação, mas após este fenómeno assinalou-se um ligeiro aumento da rigidez dos modelos. O aumento das cargas de rotura e da ductilidade dos modelos também se verificou com o incremento do diâmetro dos parafusos. Na figura 19 pode observar-se o efeito do aumento do diâmetro dos parafusos para os vários números de fiadas estudadas na carga de rotura. Verificou-se que, quanto maior o número de fiadas de parafusos de reforço ao punçoamento mais significativo foi o aumento da carga última.



Figura 19 – Efeito do diâmetro dos parafusos de reforço ao punçoamento de acordo com o número de fiadas instaladas. Belakhdar [17].

#### 3.6 Inácio, 2010 [19]

Inácio [19] realizou um estudo baseado na modelação de lajes fungiformes, através de análise numérica, recorrendo a um *software* de análise não linear, ATENA SBETA, analisando o fenómeno da rotura por punçoamento. O seu principal objetivo foi o de garantir um grau de confiança entre valores resultantes de ensaios experimentais e os resultados obtidos na análise numérica, fazendo variar algumas características da modelação computacional.

Este autor fez algumas abordagens nos modelos desenvolvidos variando parâmetros de forma a avaliar a sua influência na carga de rotura, na evolução dos deslocamentos e nas extensões das armaduras. Foram estudadas 3 lajes experimentais. Os modelos foram simulados recorrendo a elementos sólidos de 8 nós e com malha refinada junto ao pilar, exceto um que, na zona mais afastada do pilar era constituído por elementos shell, como se representa na figura 20. Foram variados, ainda, parâmetros como o efeito de aderência entre o betão e as armaduras no qual o autor desenvolveu modelos com aderência do tipo *perfect-bond* e *bond-slip*. O modelo de fendilhação abordado foi o *fixed crack model* e num dos modelos utilizou o *rotated crack model*. A energia de fratura foi também tida em conta neste estudo tendo os modelos sido simulados com 3 valores de energia diferentes, calculados de acordo com a dimensão do agregado.



Figura 20 – Exemplo de um modelo em que os elementos junto ao pilar, refinados, são do tipo *Brick* e os exteriores são do tipo shell. Inácio [19].

O autor apurou que, na avaliação das extensões nas armaduras longitudinais, quando comparadas entre os modelos numéricos e experimentais, os resultados foram pouco fiáveis, uma vez que, o posicionamento dos extensómetros podem ter ficado situados numa fenda, podendo existir saltos e/ou descompressões nestes. Verificou também que o programa computacional fez uma boa previsão dos deslocamentos e cargas de rotura, sendo que, onde se notou maiores discrepâncias dos resultados foi quando se alterou a energia de fratura e se utilizou elementos do tipo *shell*, apesar de, neste último caso, o tempo de cálculo que o programa necessitou ter sido inferior aos restantes.

## 3.7 Nogueira, 2011 [20]

Nos seus estudos, Nogueira [20], efetuou uma análise numérica do comportamento ao punçoamento de lajes fungiformes reforçadas com parafusos verticais pós-instalados, com recurso ao *software* ATENA 3D, evolução do *software* utilizado por Inácio [19], e comparou os resultados com valores resultantes de lajes experimentadas em laboratório.

Das 5 lajes estudadas, 4 caracterizaram-se por possuírem os parafusos verticais pós-instalados e a restante era a laje de referência. O autor desenvolveu 3 modelos numéricos para cada uma das lajes, comparou e avaliou as cargas e modos de rotura, as deformadas, as extensões das armaduras longitudinais e a carga nos parafusos de reforço ao punçoamento. Os modelos numéricos avaliaram a influência do tipo de fendilhação e do refinamento da malha. Um dos modelos foi definido com fendilhação do tipo *fixed crack model* e dois com *rotated crack model*, em que um deles tinha uma malha mais refinada que o outro em todo o modelo. Na figura 21 ilustra-se um exemplo de um dos modelos que possuía parafusos de reforço ao punçoamento na qual a malha é mais refinada, apenas <sup>1</sup>/<sub>4</sub> de laje foi simulado aproveitando a simetria nos dois eixos e foram definidas as condições de fronteira de modo a garantir a continuidade do modelo.

Os elementos foram simulados recorrendo a *bricks*, à exceção das armaduras longitudinais e dos parafusos verticais que foram simulados com elementos barra, caracterizando-se com modelo de comportamento multilinear.



Figura 21 – Exemplo de um dos modelos que possuía parafusos de reforço ao punçoamento em que a malha é mais refinada. Nogueira [20].

Na experimentação laboratorial, dos modelos constituídos com os parafusos verticais, o carregamento foi aplicado em duas fases, e disso, resultou em deformações residuais nos parafusos verticais. Na modelação numérica o carregamento foi aplicado numa só fase. Para se garantir semelhança entre os modelos a comparar foi aplicada uma variação de temperatura nos parafusos de modo a imprimir uma extensão inicial correspondente ao pré-esforço que lhes foi previamente aplicado.

Segundo Nogueira [20], os resultados obtidos, quanto às cargas de rotura, foram de boa aproximação e os modos de rotura foram, em geral, obtidos com exatidão. Na figura 22 ilustra-se os modos de rotura de um dos modelos estudados, caso de rotura exterior ao reforço. As deformadas lidas nos modelos numéricos foram sempre mais dúcteis que nos modelos experimentais. Não foram verificadas alterações na rigidez dos modelos quando foi refinada a malha, mas quando se alterou o tipo de fendilhação, de *fixed crack model* para *rotated crack model*, foi verificada uma ligeira diminuição da rigidez.



**Figura 22** – Exemplo dos modos de rotura nos modelos numéricos em que a rotura se deu exterior ao reforço: a) *Fixed crack model;* b) *Rotated crack model;* b) *Rotated crack model;* b) *Rotated crack model;* com malha refinada. Nogueira [20].

Na avaliação das extensões das armaduras longitudinais houve alguma disparidade de resultados, principalmente no que respeita à avaliação do varão instrumentado mais próximo do pilar. O autor não o menciona, mas talvez pela mesma razão indicada na descrição do investigador anterior. Quanto à evolução da carga, nos parafusos o ATENA 3D conseguiu prever a baixa solicitação nestes para cargas de baixo nível, existindo diferenças quando o tipo de fendilhação foi alterado em casos de solicitações elevadas.

Nogueira [20] verificou na sua investigação que a utilização do modelo de fendilhação *rotated crack model* em vez do *fixed crack model* apenas trouxe uma melhor convergência, quando a malha era mais refinada. No caso de a malha ter o mesmo refinamento o uso do modelo de fendilhação *fixed crack model* era mais apropriado que o uso do modelo de fendilhação *rotated crack model*.

### 3.8 Mamede, 2011 [21]

No seu trabalho, Mamede [21], efetuou um estudo paramétrico do punçoamento em lajes fungiformes sem armadura específica de punçoamento, através de análise numérica, com recurso ao *software* ATENA 3D.

Para a realização do estudo paramétrico foram modeladas numericamente 13 modelos de laje fungiforme, previamente ensaiadas em laboratório, com a finalidade de se validar os modelos numéricos. Compararam-se resultados experimentais e numéricos, em termos de carga de rotura e deslocamentos verticais.

Os modelos experimentais foram desenvolvidos por Ramos [7][22][23], Faria [24], Inácio [25], Guidotti [26], Guandalini [27], Tomaszewick [28] e Li [29].

Na generalidade dos modelos de calibração – *Benchmark*, os resultados obtidos foram bons, tanto em termos de carga de rotura, como dos deslocamentos verticais em pontos fulcrais.

As cargas de rotura previstas nos modelos numéricos resultaram numa boa aproximação quando comparadas com as experimentais, embora as cargas numéricas tenham sido subestimadas, na maioria dos modelos. A média da relação entre V<sub>FEM</sub> e V<sub>EXP</sub> foi de 0.96 com um coeficiente de variação (COV) de 0.05. A previsão do EC2 [12] para a resistência ao punçoamento está, também, de acordo com os resultados numéricos, resultando a média da relação V<sub>Rm,EC2</sub>/V<sub>FEM</sub> em 1.01 com um COV de 0.13. Quanto ao MC2010 [30] as cargas de rotura previstas foram ligeiramente subestimadas, de onde resultou uma relação média V<sub>Rm,MC2010</sub>/V<sub>FEM</sub> em 0.85 com COV de 0.08.

No estudo paramétrico pretendeu-se analisar a influência de vários parâmetros que condicionam a resistência ao punçoamento em lajes fungiformes, nomeadamente a espessura da laje (entre 200 e 350 mm), a percentagem de armadura longitudinal (de 0,5% a 2,0%), a classe de resistência do betão (entre 20 e 40 MPa) e a dimensão do pilar (entre 300 e 500 mm). Apresentou, a comparação dos resultados numéricos com as previsões do EC2 [12] e do MC2010 [30].

Do estudo paramétrico resultou que ao se aumentar a percentagem de armadura longitudinal a resistência ao punçoamento aumentou aproximadamente com a sua raiz cúbica, próximo do previsto segundo o EC2 [12]. Quando se avalia a influência da classe de resistência do betão, as previsões numéricas da rotura ao punçoamento resultaram num valor proporcional a  $f_c^{0.41}$ , valor que está entre o recomendado no EC2 [12] ( $f_c^{1/3}$ ) e no MC2010 [30] ( $f_c^{1/2}$ ), o processo de fendilhação é retardado consoante se aumenta a classe de resistência do betão. Com o aumento da espessura da laje e da dimensão do pilar a resistência ao punçoamento aumenta. Na Fig. 23 ilustra-se, como exemplo, a influência da percentagem geométrica de armadura longitudinal na carga de rotura, gráfico da esquerda, e o seu comportamento na evolução dos deslocamentos monitorizados.



Figura 23 – Influência da percentagem de armadura longitudinal na resistência ao punçoamento e o seu comportamento [21]

Mamede [21] propôs, também, uma alteração à equação que prevê a resistência ao punçoamento presente no EC2 [12], substituindo-se o parâmetro do efeito de escala por parâmetros dependentes da energia de fratura mecânica. Para validação da equação proposta, foram comparadas as cargas de rotura ao punçoamento de diferentes campanhas experimentais (55 modelos comparados), de diversos investigadores, com a carga de rotura ao punçoamento prevista segundo uma a expressão proposta baseada na formulação do EC2 [12], e ainda segundo o preconizado no EC2 [12] e no MC2010 [30]. A média da relação das cargas de rotura experimentais com as previstas segundo a equação proposta, o EC2 [12] e o MC2010 [30] resultou em 1.02, 0.98 e 1.14, respetivamente. Verificou-se, assim, uma abordagem mais do lado da segurança da equação proposta quando comparada com o previsto segundo o EC2 [12], enquanto o MC2010 [30] subestima, os valores da resistência ao punçoamento.

Mamede [21] concluiu que com uma análise não linear, numa abordagem tridimensional, é possível prever o comportamento de estruturas de betão armado, de acordo com os resultados obtidos.

O estudo paramétrico permitiu estudar a influência de diversos parâmetros, incluindo a energia de fratura do betão, tendo sido possível propor uma expressão com base na preconizada no EC2 [12], capaz de prever corretamente a carga de punçoamento, tendo em conta o comportamento à tração do betão, através da sua energia de fratura.

A equação proposta, permite ter em conta diretamente o tipo e dimensão dos agregados, conferindo à mesma um significado físico, tendo-se verificado que os resultados foram satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos em diversos ensaios realizados por vários investigadores.

## 4. Normas

Neste estudo foram utilizadas duas normas na previsão da resistência ao punçoamento de lajes fungiformes, nomeadamente o Eurocódigo 2 (EC2) [12] e o *Model Code* 2010 (MC2010) [30].

#### 4.1 Eurocódigo 2 (EC2) [12]

Na avaliação da carga de resistência ao punçoamento segundo o EC2 [12], o perímetro de controlo,  $u_1$ , deve de ser definido a uma distância de duas vezes a altura útil (2*d*) da área carregada ou da face do pilar, figura 24. Este perímetro deve de ser definido segundo um traçado que o conduza a um valor mínimo.



Figura 24 – Perímetros de controlo típicos em torno de áreas carregadas. Eurocódigo 2[12].

A Equação 1 determina o valor do cálculo de tensão de resistência ao punçoamento sem armaduras específicas,  $v_{Rd,c}$ :

$$v_{Rd,c} = C_{Rd,c} \cdot k(100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \ge v_{min} + k_1 \sigma_{cp} \tag{1}$$

Em que:

$$\diamond \qquad C_{Rd,c} = \frac{0.18}{\gamma_c} \tag{2}$$

$$\diamond \qquad f_{ck} \text{ em MPa};$$

$$\diamond \qquad \rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \cdot \rho_{ly}} \le 0.02 \tag{4}$$

- $\diamond$   $\rho_{lx} \in \rho_{ly}$  referem-se às armaduras de tração aderentes nas direções x e y, respetivamente. Estes valores devem ser calculados numa largura b da laje, equivalente à largura do pilar acrescida de 3d para cada lado;
- $\diamond$   $k_1$  toma o valor de 0.1, é o coeficiente da contribuição da compressão introduzida pelo pré-esforço para resistência ao punçoamento;

 $\delta = \sigma_{cp}$  é a média das tensões de compressão na zona crítica, derivadas do pré-esforço;

$$\diamond \qquad \nu_{min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2}, \text{ é a mínima resistência ao punçoamento}$$
(5)

No caso de a laje possuir armaduras específicas de punçoamento a mesma previsão é dada segundo a Equação 6.

$$v_{Rd,cs} = 075 \cdot v_{Rd,c} + 1.5 \left(\frac{d}{S_r}\right) \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd,ef} \cdot \left(\frac{1}{u_1 d}\right) \sin \alpha \tag{6}$$

Em que:

- $\diamond$   $v_{Rd,c}$  é a resistência ao punçoamento sem armaduras especificas;
- $\delta$   $S_r$  é o espaçamento radial dos perímetros das armaduras de punçoamento (mm);
- $\land$   $A_{sw}$  é a área de perímetro de armaduras de punçoamento em torno do pilar (mm<sup>2</sup>);
- $\Diamond$   $f_{ywd,ef}$  é o valor de cálculo da tensão efetiva de cedência das armaduras de punçoamento
- $\diamond$   $\alpha$  é o ângulo entre as armaduras de punçoamento e a laje.

#### 4.2 Model Code 2010 (MC2010) [30]

Na avaliação das cargas resistentes ao punçoamento segundo o MC2010 [30] o perímetro de controlo,  $b_0$ , toma valores menores que no caso anterior, sendo assumido a uma distância equivalente a metade da altura útil (0.5d), figura 25.



Figura 25 - Perímetros de controlo típicos em torno de pilares. Model Code 2010 [30].

A avaliação da capacidade resistente ao punçoamento, segundo esta norma, é dada pela Equação 7. Nesta equação o valor de  $V_{Rd,c}$  corresponde à resistência do betão em conjunto com a armadura longitudinal e o valor de  $V_{Rd,s}$  define a resistência ao punçoamento providenciada pelas armaduras específicas de punçoamento.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \tag{7}$$

As contribuições do material e da armadura longitudinal são dadas pelas Equações 8 e 9.

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_{\nu} \tag{8}$$

$$k_{\psi} = \frac{1}{1.5 + 0.6 \cdot \psi \cdot d \cdot \frac{48}{16 + d_g}} \le 0.6 \tag{9}$$

Em que:

- $\Diamond$   $k_{\psi}$  é um parâmetro que depende das rotações da laje em torno do pilar:
- $\diamond$   $d_g \acute{e}$  a dimensão máxima dos agregados;
- $\diamond$   $d_v \acute{e}$  a média da altura útil em ambas as direcções.

A parcela correspondente à contribuição da armadura de punçoamento é calculada segundo a Equação 10.

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} k_e \sigma_{sw} \sin \alpha \tag{10}$$

Em que:

- $\diamond$   $A_{sw}$  é a área de cada armadura de punçoamento em torno do pilar (mm<sup>2</sup>);
- $\diamond$   $k_e$  é um fator de redução do perímetro de controlo, assumindo 0.90 para pilares interiores; 0.7 para pilares de bordo e 0.65 para pilares de canto;
- $\phi \qquad \sigma_{sw} = \frac{E_s \psi}{6} < f_{ywd}, \text{ corresponde à tensão que a armadura de punçoamento tem capacidade para mobilizar;}$
- $\diamond \qquad \alpha \notin \alpha$  é o ângulo entre as armaduras de punçoamento e a laje.

Para a definição do valor da rotação da laje em torno do pilar na zona exterior à rotura,  $\psi$ , existem vários tipos de níveis de aproximação. Quando maior o nível de aproximação melhor é a previsão prevista segundo esta norma. No quadro 1 apresentam-se as várias expressões para o cálculo da rotação da laje na zona exterior à rotura.

O valor de  $m_{sd}$  recomendado corresponde a  $V_d/8$  para pilares internos. Para pilares de bordo:  $V_d/4$  no caso do  $m_{Rd}$  (momento resistente calculado com base na armadura disposta) considerado for calculado com base na armadura superior paralela ao bordo e  $V_d/8$  se essa armadura considerada for a mínima das armaduras superiores e inferiores na direção perpendicular ao bordo. Nos pilares de canto, o  $m_{sd}$  pode tomar o valor de  $V_d/2$ , com  $m_{Rd}$  calculado com base na mínima das armaduras superiores perpendiculares ao canto.

Nível de aproximação	ψ	
Ι	$\psi = 1.5 \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s}$	(11)
п	$\psi = 1.5 \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}}\right)^{1.5}$	(12)
III	$\psi = 1.2 \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}}\right)^{1.5}$ , com $m_{sd}$ calculado através	(13)
	de programa de análise linear, valor médio na faixa do pilar.	
IV	Valor calculado com base em programa de análise não linear.	

Quadro 1 – Rotação da laje em torno do pilar na zona exterior à rotura.

O valor de  $r_s$  corresponde à distância do centro do pilar até ao raio onde o momento fletor é nulo, sendo este valor aproximadamente  $0.22L_x$  ou  $0.22L_y$  em lajes regulares em que a razão dos vãos está entre 0.5 e 2.  $E_s$  é o módulo de elasticidade do material das armaduras longitudinais.

# 5. Agradecimentos

Este trabalho foi elaborado no âmbito do projecto FLAT - Comportamento de Lajes Fungiformes Sujeitas a Acções Cíclicas e Sísmicas (PTDC/ECM/114492/2009), com o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia - Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior.

Este projeto sobre o comportamento de lajes fungiformes sob a acção de cargas gravíticas e sísmicas deu já origem a várias publicações [21-25,31-49], servindo estas de meio de divulgação da investigação realizada.

# Bibliografia

- KING, S; DELATTE, N. J. Collapse of 2000 Commonwealth Avenue: Punching Shear Case Study. ASCE Journal of Performance of Constructed Facilities, n°1, págs. 54-61, Fevereiro, 2004.
- [2] DELATTE, N. J. Beyond Failure: Forensic Case Studies for Civil Engineers, ASCE Press, Reston, Virginia, 2009.
- [3] GARDNER, N.J.; HUH, Jungsuck; CHUNG, Lan *Lessons from Sampoong Department store collapse*. Cement and Concrete Composites, n.°24, págs. 523-529, 2002.
- [4] WOOD, J. Pipers Row Car Park, Wolverhampton, Quantitative Study of the Causes of the Partial Collapse on 20<sup>th</sup> March 1997. Structural Studies & Design Ltd, Surrey, Reino Unido, 2001.
- [5] RUIZ, M. F.; MUTTONI, A.; KUNZ, J. Strengthening of Flat Slabs Against Punching Shear Using Post-Installed Shear Reinforcement. ACI Structural Journal, Volume 107, n.º4, págs. 434-442, Julho, 2010.
- [6] TALBOT, A. N. *Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings*. University of Illinois, 1913.
- [7] RAMOS, A. M. P. Punçoamento em Lajes Fungiformes Pré-Esforçadas. Tese apresentada no Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil, Março de 2003.
- [8] RAMOS, A. M. P. Estruturas de Betão Armado II. Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Monte da Caparica, 2006.
- [9] BEUTEL, R.; HEGGER, J. Punching Shear Resistance of Shear Reinforced Flat Slabs, 1998.
- [10] Fédération Internationale du Béton *Punching of structural concrete slabs* Technical report prepared by CEB/FIP Task Group. Bulletin 12, Lausanne, 2001.
- [11] OŹBOLT, J; VOCKE, H. *Numerical Analysis of Punching Failure*. Universidade de Estugarda, Estugarda, 1999.
- [12] NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. 2010.
- [13] STALLER, M. Analytical Studies and Numerical Analyses of Punching Shear Failure in Reinforced Concrete Slabs. International Workshop on Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs, Estocolmo, 2000.
- [14] TRAUTWEIN, L.; BITTENCOURT, T.; FARIA, R.; FIGUEIRAS, J. A.; GOMES, R. Axial symmetry analyses of punching shear in reinforced flat slabs. Measuring, Monitoring and Modeling Concrete Properties, Parte 1, págs. 139-144, Northwestern University, 2006.

- [15] CEB-FIP; Fédération Internationale du Béton Model Code 1990 Design Code. Lausanne, 1993.
- [16] MUSSE, T. H. *Punching in Flat Slabs: Steel fibers and shear reinforcement.* Tese de Mestrado. Universidade Federal de Góias. 2004.
- [17] BELAKHDAR, K. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slab Strengthened with Shear Bolts. Jordan Journal of Civil Engineering, Volume 2, págs. 32-44, 2008.
- [18] POLAK, A. M. Ductility of Reinforced Concrete Flat Slab-Column Connection. Computer Aided Civil Infrastructure Engineering, págs. 71-80, 2005.
- [19] INÁCIO, R. Análise Numérica do Punçoamento em Lajes Fungiformes. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Monte da Caparica, 2010.
- [20] NOGUEIRA, J. P. M. Modelação numérica do punçoamento de lajes fungiformes reforçadas com parafusos. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Monte da Caparica, 2011.
- [21] MAMEDE, N.; RAMOS, A., FARIA, D. Experimental and parametric 3D nonlinear finite elemento analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement. Engineering and Structures, Volume 48, Março 2013, p. 442-457.
- [22] RAMOS, A. M. P. e LÚCIO, V. Post-Punching Behaviour of Prestressed Concrete Flat Slabs. Magazine of Concrete Research, Thomas Telford, 60, no. 4, Maio, 2008.
- [23] RAMOS, A. P., LÚCIO, V e REGAN, P.E. *Punching of flat slabs with in-plane forces*, Engineering Structures, Volume 33, Issue 3, Março, 2011.
- [24] FARIA, D.; LÚCIO, V.; RAMOS, A. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding. Engineering and Structures, Volume 33, Junho 2011, págs. 2025-2043.
- [25] INÁCIO, M.; RAMOS, A.; FARIA, D. Strengthening of flat slabs with transverse reinforcement by introduction of steel bolts using different anchorage approaches. Engineering and Structures, Volume 44, Novembro 2012, págs. 63-77.
- [26] GUIDOTTI, R. Poinçoccemet des Planchers dalles avec collones superposes fortement sollicitees. Tese de doutoramento. Escola Politécnica de Lausane, Suiça. 2010.
- [27] GUANDALINI, S. *Poiçonnement Symetrique des dalles en Beton Arme*. Tede se Doutoramento. Escola Politécnica de Lausane, Suiça. 2006.
- [28]TOMASZEWICK, A. High-strength concrete SP2-plates and sheels, report 2.3. Punching shear capacity of reinforced concrete slabs. Noruega. 1993.
- [29] LI, K. *Influence of size on punching shear strength of concrete slabs*. Tese de Mestrado. Universisade de McGill, Montreal, Canadá. 2000.

- [30] Fédération Internationale du Béton: *Model Code 2010. First complet draft.* Bulletin 56. Volume 2. Lausane. 2010.
- [31] FARIA, D., BISCAIA, H., LÚCIO, V. e RAMOS, A Punching of reinforced concrete slabs and experimental analysis and comparison with codes. Proceedings of IABSE-Fib Codes in Structural Engineering – Developments and Needs for International Practice, Cavtat, Dubrovnik, Croácia, Maio 2010.
- [32] GOMES, J. e RAMOS, A. Estudo Experimental do Punçoamento em Lajes Reforçadas com Armadura Transversal Aderente Pós-Instalada, Encontro Nacional Betão Estrutural 2010, Lisboa, Novembro, 2010.
- [33] PAIAS, J. e RAMOS, A. Estudo Experimental do Punçoamento em Lajes de Betão Reforçado com Fibras de Aço, Encontro Nacional Betão Estrutural 2010, Lisboa, Novembro, 2010.
- [34] FARIA, D., BISCAIA, H., LÚCIO, V. e RAMOS, A Material and geometrical parameters affecting punching of reinforced concrete flat slabs with orthogonal reinforcement. Short Paper, fib Symposium PRAGUE 2011 – Concrete Engineering for Excellence and Efficiency, Praga, República Checa, Junho 2011.
- [35] RAMOS, A., LÚCIO, V., FARIA, D. e INÁCIO, M. Punching Research at Universidade Nova de Lisboa. Design Of Concrete Structures and Bridges Using Eurocodes, Bratislava, Eslováquia, Setembro 2011.
- [36]FARIA, D., LÚCIO, V., e RAMOS, A. Pull-out and push-in tests of bonded steel strands. Magazine of Concrete Research, Thomas Telford, Volume 63, Issue 9, Setembro, 2011, pp. 689-705.
- [37] FARIA, D., INÁCIO, M., LÚCIO, V. e RAMOS, A. Punching of Strengthened Concrete Slabs – Experimental Analysis and Comparison with Codes, IABSE, Structural Engineering International, No. 2 – "Codes of Practice in Structural Engineering", Maio 2012.
- [38] GOMES, J. e RAMOS, A. P. Punçoamento em Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos Transversais Aderentes (Parte 1). Revista Internacional Construlink, Nº 30, Junho de 2012, Vol. 10, 23-33.
- [39] GOMES, J. e RAMOS, A. P. Punçoamento em Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos Transversais Aderentes (Parte 2). Revista Internacional Construlink, Nº 30, Junho de 2012, Vol. 10, 34-43.
- [40] FARIA, D., LÚCIO, V., e RAMOS, A., Post-Punching Behaviour of Flat Slabs Strengthened with a New Technique using Post-Tensioning, Engineering Structures, Volume 40, Julho 2012, pp 382-397.
- [41] MAMEDE, N., RAMOS, A. e FARIA, D. Análise do efeito de características mecânicas e geométricas que afetam o comportamento ao Punçoamento de lajes fungiformes, Encontro Nacional Betão Estrutural 2012, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Outubro de 2012.

- [42] FARIA, D.; LÚCIO, V. e RAMOS, A. Reforço de lajes com recurso a pós-tensão com ancoragens por aderência, Encontro Nacional Betão Estrutural 2012, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Outubro de 2012.
- [43] INÁCIO, M.; RAMOS, A.; LÚCIO, V. e FARIA, D. Punçoamento de lajes fungiformes reforçadas com parafusos – efeito da área e posicionamento da ancoragem, Encontro Nacional Betão Estrutural 2012, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Outubro de 2012.
- [44] CLÉMENT, T., RAMOS, A. P., FERNÁNDEZ RUIZ, M. e MUTTONI, A. Design for punching of prestressed concrete slabs. Structural Concrete, 14: 157–167. 2013.
- [45] MONTEIRO AZEVEDO, N. e LEMOS, V. A 3D generalized rigid particle contact model for rock fracture, Engineering Computations, Vol 30 (2), 2013, pp. 277-300.
- [46] GOUVEIA, N.; FERNANDES, N., FARIA, D.; RAMOS A. e LÚCIO, V. Punching of Steel Fibre Reinforcement Concrete Flat Slabs, Proceedings of fib symposium Tel Aviv 2013, Tel Aviv, Abril 2013.
- [47] FARIA, D.; LÚCIO, V. e RAMOS, A. Development of a Design Proposal for a Slab Strengthening System using Prestress with Anchorages by Bonding, Proceedings of fib symposium Tel Aviv 2013, Tel Aviv, Abril 2013.
- [48] INÁCIO, M.; RAMOS, A., LÚCIO, V. e FARIA, D. Punching of High Strength Concrete Flat Slabs - Experimental Investigation, Proceedings of fib symposium Tel Aviv 2013, 4p, Tel Aviv, Abril de 2013.
- [49] SILVA, R.; FARIA, D.; RAMOS, A.; INÁCIO, M. A physical approach for considering the anchorage head size influence in the punching capacity of slabs strengthened with vertical steel bolts, Structural Concrete, Junho, 2013.