



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Civil

## **Modelação Numérica do Punçoamento de Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos**

**João Pedro Matias Nogueira**

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade  
Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, Ramo de  
Estruturas

Orientador Científico

**Professor Doutor António Manuel Pinho Ramos**

**Júri:**

**Presidente:** Professor Doutor Fernando Farinha da Silva Pinho

**Vogais:** Professor Doutor Luís Armando Canhoto Neves

Professor Doutor António Manuel Pinho Ramos

Abril de 2011

“Copyright” João Pedro Matias Nogueira, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

## AGRADECIMENTOS

Gostava de expressar os meus agradecimentos ao meu orientador científico, o Professor Doutor António Manuel Pinho Ramos, por todo o apoio que deu ao longo da elaboração desta dissertação, quer pelo tempo dedicado, quer pela paciência despendida e pelo conhecimento transmitido.

Ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e seus docentes, por tudo o que contribuíram para o amadurecimento dos meus conhecimentos nos últimos 5 anos, e que me tornaram num Engenheiro.

Aos representantes da empresa Cervenka Consulting, nomeadamente ao Professor Doutor Jan Červenka e ao Professor Doutor Dobromil Přyl pelo apoio no esclarecimento de dúvidas no software utilizado.

Aos colegas e amigos, em especial aos que fizeram companhia e esclareceram dúvidas durante a realização deste trabalho.

À minha família e namorada Patrícia pelo apoio e incentivo que sempre me deram desde o início do curso até ao presente ano.

Para finalizar, à minha mãe, pela ajuda na revisão do texto.



## **MODELAÇÃO NUMÉRICA DO PUNÇOAMENTO DE LAJES FUNGIFORMES REFORÇADAS COM PARAFUSOS**

### **RESUMO**

Neste trabalho apresenta-se um estudo sobre a análise numérica do comportamento ao punçamento de lajes fungiformes reforçadas com parafusos verticais pós-instalados, e devida comparação com ensaios experimentais.

A análise foi feita com recurso ao software ATENA, Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis, que permite análises não lineares dos materiais envolvidos, nomeadamente do betão e do aço, permitindo simular fendilhação, o que é essencial em análises de zonas de descontinuidade geométrica em estruturas de betão armado.

Ao todo foram simulados cinco modelos de laje fungiforme, quatro dos quais foram reforçados com parafusos verticais pós-instalados. Nos modelos numéricos foi simulado apenas um quarto de laje para aproveitamento das condições de simetria.

O modelo experimental foi instrumentado com deflectómetros, extensómetros na armadura longitudinal superior, extensómetros nos parafusos de reforço e células de carga. No modelo numérico foram adquiridos os dados necessários para a devida comparação com o modelo experimental.

Foi efectuada uma análise comparativa entre os resultados obtidos experimental a nível dos dados obtidos da instrumentação, deformações, extensões, cargas de rotura e também a nível do modo de rotura.



# NUMERICAL ANALYSIS OF PUNCHING SHEAR BEHAVIOR OF FLAT SLABS STRENGTHENED WITH STEEL BOLTS

## ABSTRACT

This work presents a study on the numerical analysis of punching shear behavior in flat slabs strengthened with post-installed vertical bolts, and proper comparison with experimental results.

The analysis were carried out with the software ATENA, Advanced Tool for Engineering Analysis, a software that allows nonlinear analysis of the materials, concrete and steel, allowing the simulation of concrete cracking, which is essential in the analysis of geometric discontinuity zones in reinforced concrete structures.

A total of five flat slab models were simulated, four of which were reinforced with post-installed vertical bolts. The numerical models were simulated with only a quarter of the slab in order to take advantage of symmetry.

The experimental model was instrumented with lvdt's, strain gauges in the superior reinforcement bars, strain gauges in the reinforcement bolts and load cells. In the numerical model the necessary data was acquired in order to attain a proper comparison with the experimental model.

Comparisons were made with the available data, in terms of vertical displacements, strains, failure loads and also failure mode.



## **PALAVRAS CHAVE**

Punçoamento

Análise Numérica

Elementos Finitos

Laje Fungiforme

Betão Armado

Reforço

Parafusos

Pré-Esforço

## **KEYWORDS**

Punching

Numerical Analysis

Finite Element

Flat Slab

Reinforced Concrete

Strengthening

Bolts

Prestress



## NOTAÇÕES

### Letras minúsculas latinas

$c$	Factor de redução da resistência à compressão após fissuração
$c_2$	Característica geométrica da laje, modelo Kinnunen/Nylander
$d$	Altura útil das armaduras traccionadas
$d_a$	Dimensão máxima do agregado, modelo de Menétrey
$f_c$	Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão, modelo de Bæstrup e Nielsen
$f_c$	Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão em provetes cilíndricos, modelo de Shehata Simplificado
$f_c^{ef}$	Tensão efectiva de resistência à compressão
$f_{ccm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão, em provetes cúbicos
$f_{ck}$	Valor característico da tensão de rotura do betão, NP EN 1992-1-1
$f_{cm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão, em provetes cilíndricos
$f_{ct}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção, modelo de Bæstrup e Nielsen
$f_{ct}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção, modelo de Menétrey
$f_{ctm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção
$f_{sw}$	Tensão média de resistência à tracção do aço das armaduras de reforço, modelo de Menétrey
$f_t$	Tensão média de resistência à tracção do aço, modelo de Menétrey
$f_t^{ef}$	Tensão efectiva de resistência à tracção, sob rotura biaxial
$f_y$	Tensão média de resistência à tracção do aço
$f_{ywd,ef}$	Tensão de cedência de cálculo à tracção do aço
$k$	Factor de correcção, modelo de Kinnunen/Nylander
$k$	Factor de calibração geométrica das lajes, NP EN 1992-1-1
$k_1$	Coeficiente de correcção para o pré-esforço, NP EN 1992-1-1

$k_x$	Percentagem de área comprimida, modelo de Kinnunen/Nylander
$l$	Comprimento vertical da armadura de reforço, modelo de Menétrey
$l_{slab}$	Vão da laje, modelo de Kinnunen/Nylander
$m_r$	Momento aplicado na laje, modelo de Shehata Simplificado
$n_c$	Factor de concentração de tensões para consideração do efeito multiaxial de tensões, modelo de Shehata Simplificado
$q_n$	Tensão normal, Adaptative Fixed Crack Model
$q_{n,f}$	Resistência à tracção do material, Adaptative Fixed Crack Model
$q_t$	Tensão tangencial, Adaptative Fixed Crack Model
$r_0$	Raio do pilar, modelo de Shehata Simplificado
$r_1$	Raio até ao início do cone de punçamento na face inferior da laje, modelo de Menétrey
$r_2$	Raio até ao início do cone de punçamento na face superior da laje, modelo de Menétrey
$r_c$	Função de redução de resistência à compressão após fissuração
$r_{ec}$	Factor de redução de resistência à compressão pelo efeito de Poisson
$r_f$	Raio do cone de punçamento no interior da laje, modelo de Kinnunen/Nylander
$r_s$	Raio do pilar, modelo de Menétrey
$r_u$	Raio do cone de punçamento na face superior da laje, modelo de Kinnunen/Nylander
$s$	Comprimento do cone de punçamento num plano, modelo de Menétrey
$u$	Perímetro de contorno considerado para o punçamento, NP EN 1992-1-1
$V_{Rd,c}$	Tensão de resistência ao punçamento, sem armaduras específicas, NP EN 1992-1-1
$V_{Rd,cs}$	Tensão de resistência ao punçamento, com armaduras específicas, NP EN 1992-1-1
$w$	Abertura de fenda
$w_c$	Abertura de fenda após anulação da tensão de resistente à tracção

---

x	Altura da zona comprimida de flexão, modelo de Shehata Simplificado
z	Braço do binário das forças interiores

### Letras maiúsculas latinas

A	Parâmetro de calibração da laje, modelo de Moe
$A_p$	Área de um cabo de pré-esforço, modelo de Menétrey
$A_s$	Área de um varão da armadura de flexão, modelo de Menétrey
$A_{sw}$	Área de armadura de reforço, modelo de Menétrey
$A_{sw}$	Área de armadura de reforço, NP EN 1992-1-1
$C_{Rd,c}$	Factor de calibração da expressão da tensão resistente ao punçamento, NP EN 1992-1-1
$E_c$	Módulo de Elasticidade Secante do Betão
$E_{c1}$	Módulo de Elasticidade Secante do Betão
$E_{ci}$	Módulo de Elasticidade Tangente do Betão
$E_{sw}$	Módulo de Elasticidade Tangente do Betão, modelo de Menétrey
F	Estado de tensões num ponto, Adaptative Fixed Crack Model
$F_{cr}$	Força de compressão na zona de contacto no cone de punçamento, modelo de Shehata Simplificado
$F_{ct}$	Força de compressão na folha inferior da laje, modelo de Shehata Simplificado
$F_{ct}$	Parcela correspondente à resistência à tracção do betão, modelo de Menétrey
$F_d$	Valor de dimensionamento das acções
$F_{dow}$	Parcela correspondente ao efeito de ferrolho, modelo de Menétrey
$F_{fail}$	Carga resistente da laje
$F_{flex}$	Força resistente à flexão, modelo de Menétrey
$F_p$	Parcela correspondente aos cabos de pré-esforço, modelo de Menétrey
$F_{pun}$	Força resistente ao punçamento, modelo de Menétrey

$F_{sr}$	Força de tracção nas armaduras na zona do cone de punçamento, modelo de Shehata Simplificado
$F_{st}$	Força de tracção na armadura superior da laje, modelo de Shehata Simplificado
$F_{sw}$	Parcela correspondente às armaduras de reforço, modelo de Menétrey
$G_f$	Energia de Fractura
$L_c, L_t$	Projecções das dimensões do elemento finito segundo os eixos das tensões principais
$P$	Carga aplicada na laje, modelo de Shehata Simplificado
$R_d$	Valor de dimensionamento da resistência
$R_m$	Valor médio da resistência
$S$	Superfície do cone de punçamento, compreendida verticalmente entre o braço do binário das forças interiores e horizontalmente entre os raios $r_1$ e $r_2$ , modelo de Menétrey
$V_{flex}$	Força última de resistência à flexão, modelo de Moe
$V_{shear}$	Força última de resistência ao esforço transverso, modelo de Moe
$V_u$	Carga última de punçamento, modelo de Moe
$V_{u,c}$	Resistência última do betão, modelo de Kinnunen/Nylander
$V_{u,s}$	Resistência última das armaduras, modelo de Kinnunen/Nylander

### Letras gregas

$\alpha$	Inclinação do cone de rotura por punçamento
$\beta_p$	Inclinação dos cabos de pré-esforço, modelo de Menétrey
$\beta_{sw}$	Inclinação da armadura de reforço, modelo de Menétrey
$\gamma^*_R$	Factor de segurança da resistência global
$\gamma_{Rd}$	Factor de incerteza do modelo

---

$\Delta_x^{thr}$	Ângulo pré-definido para alteração da direcção das fendas no modelo de fendilhação Multiple Fixed Crack Model
$\Delta\Phi$	Ângulo adoptado para o elemento radial, limitado pelas fendas radiais, modelo de Shehata Simplificado
$\varepsilon_{c1}$	Extensão correspondente à resistência máxima à compressão do betão
$\varepsilon_{cr}$	Extensão de abertura de fenda
$\varepsilon^{eq}$	Extensão uniaxial equivalente à tensão efectiva
$\zeta$	Relação entre a tensão instalada na armadura e a tensão de cedência, modelo de Menétrey
$\eta$	Coeficiente de correcção da espessura da laje, modelo de Menétrey
$\mu$	Coeficiente de correcção para a relação entre dimensões do pilar e a espessura da laje, modelo de Menétrey
$\xi$	Coeficiente de correcção da percentagem de armadura, modelo de Menétrey
$\rho$	Percentagem geométrica de armadura, modelo de Kinnunen/Nylander
$\rho_l$	Percentagem geométrica de armadura, NP EN 1992-1-1
$\rho_x, \rho_y$	Percentagens geométricas de armadura em direcções perpendiculares, NP EN 1992-1-1
$\sigma$	Tensão normal na fenda, Lei de abertura de Fendas
$\sigma_{c1}$ e $\sigma_{c2}$	Tensões Principais
$\sigma_c^{ef}$	Tensão efectiva
$\sigma_{cp}$	Média das tensões de compressão na zona crítica, NP EN 1992-1-1
$\sigma_{cu}$	Tensão média de resistência à compressão do betão em provetas cúbicos
$\sigma_p$	Tensão de pré-esforço dos cabos instalados, modelo de Menétrey
$\sigma_s$	Tensão instalada na armadura de flexão, modelo de Menétrey
$\sigma_x, \sigma_y$	Tensões de compressão na zona crítica em direcções perpendiculares, NP EN 1992-1-1

## Abreviações

CEB	Comité Euro-International du Béton
EC2	Eurocódigo 2 correspondente à NP EN 1992-1-1
FCM	Fixed Crack Model
FIB	Fédération Internationale du Béton
FIP	Fédération Internationale de la Précontrainte
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
RCM	Rotated Crack Mode
RILEM	Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, systèmes de construction et ouvrages

---

## ÍNDICE

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	iii
ABSTRACT .....	v
PALAVRAS CHAVE.....	vii
KEYWORDS.....	vii
NOTAÇÕES .....	ix
ÍNDICE .....	xv
ÍNDICE DE QUADROS .....	xxv
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 ASPECTOS GERAIS .....	1
1.2 OBJECTIVOS .....	2
1.3 ORGANIZAÇÃO .....	3
<b>2 ESTADO DA ARTE .....</b>	<b>5</b>
2.1 INTRODUÇÃO .....	5
2.2 MECANISMO DO FENÓMENO DO PUNÇOAMENTO.....	5
2.3 MODELOS EMPÍRICOS E ANALÍTICOS .....	7
2.3.1 <i>Kinnunen e Nylander, 1960</i> .....	7
2.3.2 <i>Moe, 1960</i> .....	9
2.3.3 <i>Bræstrupe Nielsen, 1976</i> .....	9
2.3.4 <i>Shehata Simplificado, 1990</i> .....	10
2.3.5 <i>Menétre, 1996</i> .....	12
2.4 MODELOS NUMÉRICOS.....	18
2.4.1 <i>Ožbolt e Vocke (MASA), 1999</i> .....	18
2.4.2 <i>Beutel e Hegger, 1998</i> .....	19
2.4.3 <i>Staller (MARC), 2000</i> .....	21
2.4.4 <i>Trautwein et al. (2006) (DIANA)</i> .....	22
2.4.5 <i>Belakhdar, 2008</i> .....	24
2.4.6 <i>Inácio, 2010</i> .....	26
2.5 NORMAS E RECOMENDAÇÕES .....	27

2.5.1	<i>Eurocódigo 2</i> .....	27
2.5.2	<i>Model Code 2010</i> .....	29
<b>3</b>	<b>ANÁLISE NÃO LINEAR DE ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO .....</b>	<b>33</b>
3.1	ELEMENTOS FINITOS.....	33
3.1.1	<i>Formulação do problema pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais .....</i>	33
3.1.2	<i>Tipos de Elementos.....</i>	35
3.1.3	<i>Integração de Gauss .....</i>	37
3.2	MODOS DE FRACTURA .....	39
3.3	FISSURAÇÃO .....	40
3.3.1	<i>Fictitious Crack Model .....</i>	40
3.3.2	<i>Crack Band Theory.....</i>	40
3.3.3	<i>Modelos de Fissuração .....</i>	41
3.3.4	<i>Fissuração Discreta.....</i>	42
3.3.5	<i>Fissuração Distribuída .....</i>	42
3.4	INTRODUÇÃO AO SOFTWARE ATENA .....	48
3.5	MODELOS DE CONSTITUTIVOS DO BETÃO .....	49
3.5.1	<i>Relações Tensão-Deformação .....</i>	49
3.5.2	<i>Comportamento sob Tracção .....</i>	50
3.5.3	<i>Comportamento sob Compressão .....</i>	52
3.5.4	<i>Processo de fractura .....</i>	53
3.5.5	<i>Rotura Biaxial .....</i>	54
3.5.6	<i>Fendilhação.....</i>	55
3.5.7	<i>Comportamento após Fendilhação .....</i>	56
3.6	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ARMADURAS DE AÇO .....	57
3.6.1	<i>Armadura Distribuída .....</i>	57
3.6.2	<i>Armadura Discreta.....</i>	57
3.6.3	<i>Relações Tensão-Deformação .....</i>	58
3.6.4	<i>Modelos de Aderência .....</i>	58
<b>4</b>	<b>DESCRÍÇÃO DOS MODELOS E ENSAIOS.....</b>	<b>61</b>
4.1	MODELOS EXPERIMENTAIS (INÁCIO, 2010).....	61
4.1.1	<i>Geometria.....</i>	61
4.1.2	<i>Materiais.....</i>	64
4.1.3	<i>Instrumentação .....</i>	69

---

4.1.4	<i>Execução do Ensaio</i> .....	70
4.2	MODELAÇÃO NUMÉRICA.....	72
4.2.1	<i>Geometria</i> .....	72
4.2.2	<i>Materiais</i> .....	76
4.2.3	<i>Pontos de aquisição de dados</i> .....	79
4.2.4	<i>Execução do Ensaio</i> .....	80
<b>5</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA.....</b>	<b>83</b>
5.1	CARGA DE ROTURA E MODO DE ROTURA.....	83
5.2	Evolução dos deslocamentos verticais .....	92
5.2.1	<i>Laje ID1</i> .....	92
5.2.2	<i>Laje ID2</i> .....	95
5.2.3	<i>Laje ID3</i> .....	98
5.2.4	<i>Laje ID4</i> .....	100
5.2.5	<i>Laje ID5</i> .....	103
5.2.6	<i>Observações</i> .....	105
5.3	Evolução das extensões na armadura superior.....	106
5.3.1	<i>Laje ID1</i> .....	107
5.3.2	<i>Laje ID2</i> .....	111
5.3.3	<i>Laje ID3</i> .....	115
5.3.4	<i>Laje ID4</i> .....	119
5.3.5	<i>Laje ID5</i> .....	123
5.3.6	<i>Observações</i> .....	127
5.4	Evolução da carga nos parafusos.....	127
5.4.1	<i>Laje ID2</i> .....	128
5.4.2	<i>Laje ID3</i> .....	130
5.4.3	<i>Laje ID4</i> .....	132
5.4.4	<i>Laje ID5</i> .....	134
5.4.5	<i>Observações</i> .....	135
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS .....</b>	<b>137</b>
6.1	CONCLUSÕES FINAIS.....	137
6.2	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS .....	138
<b>REFERÊNCIAS.....</b>		<b>139</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 – Evolução do poder de computação .....	2
Figura 2-1 – Fendas tangenciais e radiais.....	6
Figura 2-2 – Fendilhação de corte .....	6
Figura 2-3 – Separação entre pilar e laje devido à abertura da fenda de corte .....	7
Figura 2-4 – Modelo Mecânico de Kinnunen e Nylander .....	8
Figura 2-5 – Cone de rotura do modelo de Braestrup et al .....	10
Figura 2-6 – Modelo mecânico, elemento rígido e equilíbrio e forças .....	11
Figura 2-7 – Representação das forças intervenientes na resistência ao punçoamento .....	13
Figura 2-8 – Modos de rotura em lajes reforçadas .....	16
Figura 2-9 – Cones de Rotura: a) Simulação numérica (Extensões Principais) b) Ensaio laboratorial .....	19
Figura 2-10 – Tipos de elementos de barra usados para simular armadura específicas .....	20
Figura 2-11 – Ilustração das extensões principais na rotura .....	21
Figura 2-12 – Influência da espessura da laje na resistência ao punçoamento .....	22
Figura 2-13 – Influência da resistência do betão na resistência ao punçoamento .....	22
Figura 2-14 – Malha de elementos finitos e disposição de armaduras .....	23
Figura 2-15 – <b>Cima</b> Esquerda – Rotura M1; Direita – Rotura M2; <b>Baixo</b> – Rotura M3 .....	24
Figura 2-16 – Malha de Elementos Finitos utilizada por Belakhdar .....	25
Figura 2-17 – Influência do número de fiadas no comportamento da laje .....	25
Figura 2-18 – Influência do número de fiadas de armadura de reforço na resistência ao punçoamento .....	26
Figura 2-19 – Modelo com elementos “Brick” .....	26
Figura 2-20 – Modelo com elementos “Brick” no interior e elementos “Shell” no exterior .....	27
Figura 2-21 – Perímetro de contorno considerado pelo Eurocódigo 2 .....	28
Figura 2-22 – Algoritmo previsão-correcção .....	30
Figura 3-1 – Geometria dos elementos Tetraedros .....	36
Figura 3-2 – Geometria dos elementos Hexaedros .....	36
Figura 3-3 – Geometria dos elementos <i>Wedge</i> .....	36
Figura 3-4 – Transformação de coordenadas .....	38
Figura 3-5 – Modos de propagação de fendas .....	40
Figura 3-6 – Bandas de rotura, projecção das dimensões do elemento .....	41
Figura 3-7 – Propagação da fenda sem reformulação de malha .....	42
Figura 3-8 – Propagação da fenda com reformulação de malha .....	42
Figura 3-9 - Estados de extensões e tensões após fissuração no <i>Fixed Crack Model</i> .....	43
Figura 3-10 - Estados de extensões e tensões após fissuração no <i>Rotated Crack Model</i> .....	44
Figura 3-11 – a) Microestrutura do material granular, b) Elemento representativo dos microplanos c) Projecções das extensões de um microplano .....	45
Figura 3-12 – Ilustração gráfica do critério de falha do <i>Adaptative Fixed Crack Model</i> .....	46

Figura 3-13 – Ilustração de alguns modelos de fissuração .....	47
Figura 3-14 – Esquerda - Início do segmento coesivo; Direita – Propagação do segmento .....	48
Figura 3-15 – Esquerda – Intersecção de segmentos formando uma ponta livre; Direita – União de segmentos .....	48
Figura 3-16 - Diagrama Tensão-Deformação .....	50
Figura 3-17 – Lei de abertura de fendas exponencial .....	51
Figura 3-18 - Relações Tensão-Deformação propostas pelo Model Code 1990 .....	52
Figura 3-19 - Relações adoptadas pelo <i>software</i> SBETA ATENA .....	52
Figura 3-20 - Fases da abertura de fendas .....	54
Figura 3-21 - Critério de rotura Biaxial .....	55
Figura 3-22 – Modelo de amolecimento relacionado com o tipo de fractura.....	56
Figura 3-23 – Redução de compressão após fendilhação .....	57
Figura 3-24 – Modelos de armaduras .....	58
Figura 3-25 – Modelos pré-definidos de <i>Bond Slip</i> .....	59
Figura 4-1 – Planta da laje ID1 .....	62
Figura 4-2 – Corte da laje no ensaio .....	62
Figura 4-3 – Planta das lajes ID2 a ID5.....	63
Figura 4-4 – Pormenor da geometria do reforço das lajes .....	63
Figura 4-5 – Esquema das armaduras das lajes .....	64
Figura 4-6 – Relações tensão-deformação obtidas no ensaio de tracção aos varões fornecidos .....	66
Figura 4-7 – Geometria dos parafusos de reforço .....	67
Figura 4-8 – Relações tensão-deformação dos parafusos de reforço .....	67
Figura 4-9 – Relações tensão-deformação e tensões limite proporcionalidade dos parafusos de reforço .....	68
Figura 4-10 – Deflectómetros presentes no ensaio.....	69
Figura 4-11 – Localização dos extensómetros nos varões no eixo N-S.....	69
Figura 4-12 – Localização dos extensómetros nos parafusos de reforço .....	70
Figura 4-13 – Geometria do modelo no ATENA.....	73
Figura 4-14 – Geometria do modelo ID1 no ATENA; Cima – 1/4 Laje em planta; Baixo – 1/4 Laje em corte .....	74
Figura 4-15 – Modelo ID1 representado pelo pré-processamento do software ATENA, para os dois refinamentos utilizados.....	74
Figura 4-16 – Geometria do modelo ID2 a ID5 no <i>software</i> ATENA; Cima – 1/4 Laje em planta; Baixo – 1/4 Laje em corte.....	75
Figura 4-17 – Modelo ID2 a ID5 representado pelo pré-processamento do <i>software</i> ATENA, para os dois refinamentos utilizados .....	76
Figura 4-18 – Diagrama tensão-deformação dos varões de diâmetro de 6mm .....	77
Figura 4-19 – Diagrama tensão-deformação dos varões de diâmetro de 10mm .....	78

---

Figura 4-20 – Evolução da tensão com a extensão no parafuso de diâmetro M6 e o respectivo modelo numérico .....	78
Figura 4-21 – Evolução da tensão com a extensão no parafuso de diâmetro M8 e o respectivo modelo numérico .....	79
Figura 4-22 – Evolução da tensão com a extensão no parafuso de diâmetro M10 e o respectivo modelo numérico .....	79
Figura 4-23 – Localização dos pontos de aquisição de dados .....	80
Figura 5-1 – Comparaçao entre as cargas de rotura experimentais, numéricas e as previstas pela norma EC2 ..	85
Figura 5-2 – Modos de rotura para os modelos ID1, a) ID1, b) ID1 RCM, c) ID1 RCM Refinado, d) Experimental	87
Figura 5-3 – Modos de rotura para os modelos ID2, a) ID2, b) ID2 RCM, c) ID2 RCM Refinado, d) Experimental	88
Figura 5-4 – Modos de rotura para os modelos ID3, a) ID3, b) ID3 RCM, c) ID3 RCM Refinado, d) Experimental	89
Figura 5-5 – Modos de rotura para os modelos ID4, a) ID4, b) ID4 RCM, c) ID4 RCM Refinado, d) Experimental	90
Figura 5-6 – Modos de rotura para os modelos ID5, a) ID5, b) ID5 RCM, c) ID5 RCM Refinado, d) Experimental	91
Figura 5-7 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID1 .....	93
Figura 5-8 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID1.....	93
Figura 5-9 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID1 RCM .....	94
Figura 5-10 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID1 RCM Refinado.....	94
Figura 5-11 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID2 .....	96
Figura 5-12 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID2.....	96
Figura 5-13 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID2 RCM .....	97
Figura 5-14 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID2 RCM Refinado.....	97
Figura 5-15 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID3 .....	98
Figura 5-16 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID3.....	99
Figura 5-17 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID3 RCM .....	99
Figura 5-18 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID3 RCM Refinado.....	100
Figura 5-19 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID4 .....	101
Figura 5-20 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID4.....	101
Figura 5-21 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID4 RCM .....	102
Figura 5-22 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID4 RCM Refinado.....	102
Figura 5-23 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID4 .....	103
Figura 5-24 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID5.....	104
Figura 5-25 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID5 RCM .....	104
Figura 5-26 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID5 RCM Refinado.....	105
Figura 5-27 – Posição dos extensómetros.....	106
Figura 5-28 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID1 e comparação com modelo experimental .....	107

Figura 5-29 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID1 e comparação com modelo experimental, por extensómetro .....	108
Figura 5-30 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID1 (corte E-O).....	109
Figura 5-31 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID1 RCM (corte E-O) .....	110
Figura 5-32 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID1 RCM Refinado (corte E-O).....	110
Figura 5-33 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID2 e comparação com modelo experimental .....	111
Figura 5-34 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID2 e comparação com modelo experimental, por extensómetro .....	112
Figura 5-35 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID2 (corte E-O).....	113
Figura 5-36 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID2 RCM (corte E-O) .....	113
Figura 5-37 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID2 RCM Refinado (corte E-O).....	114
Figura 5-38 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID3 e comparação com modelo experimental .....	115
Figura 5-39 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID3 e comparação com modelo experimental, por extensómetro .....	116
Figura 5-40 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID3 (corte E-O).....	117
Figura 5-41 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID3 RCM (corte E-O) .....	118
Figura 5-42 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID3 RCM Refinado (corte E-O).....	118
Figura 5-43 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID4 e comparação com modelo experimental .....	119
Figura 5-44 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID4 e comparação com modelo experimental, por extensómetro .....	120
Figura 5-45 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID4 (corte E-O).....	121
Figura 5-46 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID4 RCM (corte E-O) .....	121
Figura 5-47 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID4 RCM Refinado (corte E-O).....	122
Figura 5-48 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID5 e comparação com modelo experimental .....	123
Figura 5-49 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID5 e comparação com modelo experimental, por extensómetro .....	124
Figura 5-50 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID5 (corte E-O).....	125
Figura 5-51 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID5 RCM (corte E-O) .....	126
Figura 5-52 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID5 RCM Refinado (corte E-O).....	126
Figura 5-53 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID2.....	128
Figura 5-54 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID2 RCM .....	128
Figura 5-55 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID2 RCM Refinado.....	129
Figura 5-56 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID2.....	129

Figura 5-57 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID3 .....	130
Figura 5-58 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID3 RCM .....	130
Figura 5-59 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID3 RCM Refinado.....	131
Figura 5-60 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID3 .....	131
Figura 5-61 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID4 .....	132
Figura 5-62 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID4 RCM .....	132
Figura 5-63 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID4 RCM Refinado.....	133
Figura 5-64 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID4 .....	133
Figura 5-65 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID5 .....	134
Figura 5-66 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID5 RCM .....	134
Figura 5-67 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID5 RCM Refinado.....	134
Figura 5-68 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID5 .....	135



## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 2-1 – Resultados obtidos nos ensaios de Trautwein et al .....	23
Quadro 3-1- Tipos de elementos 3D .....	37
Quadro 4-1– Alturas úteis das lajes.....	64
Quadro 4-2– Características do Betão.....	65
Quadro 4-3 – Características do Aço .....	66
Quadro 4-4 – Características dos Parafusos .....	67
Quadro 4-5 – Cargas da 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> fase do carregamento .....	71
Quadro 4-6 – Pré-esforço nos parafusos de reforço .....	71
Quadro 4-7 – Cargas de fendação dos modelos ID1 a ID5 nos ensaios experimentais.....	72
Quadro 4-8 – Características do Betão no <i>software</i> ATENA.....	77
Quadro 4-9 – Pré-Esforço inicial e Variação de temperatura correspondente .....	81
Quadro 4-10 – Carga crítica estimada e observada para os diversos modelos.....	81
Quadro 5-1 – Comparação entre as cargas de rotura experimentais, numéricas e as previstas pela norma EC2	84
Quadro 5-2 – Variação máxima da carga de rotura nos modelos numéricos .....	85
Quadro 5-3 – Média dos erros obtidos face ao valor experimental.....	85



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Aspectos gerais

Desde sempre que o trabalho de um engenheiro de estruturas tem a função de dimensionamento de estruturas seguras e económicas, obedecendo às limitações arquitectónicas impostas.

As lajes fungiformes permitem um aligeiramento dos edifícios, minorando ligeiramente a massa, facilitam a passagem de instalações técnicas sem alteração do sistema estrutural, e são de execução fácil quando comparadas com lajes vigadas. Como desvantagens, a não utilização de vigas provoca esforços de flexão e punçamento concentrados nos apoios, provoca maiores deformações nos painéis centrais, e uma maior flexibilidade face às acções horizontais [40].

Os esforços concentrados nos apoios condicionam frequentemente a escolha da espessura da laje, e/ou conduzem à utilização de capitéis para aumento local da altura útil da laje, ou ao uso de armadura específica de punçamento.

Como tal, as lajes fungiformes representam uma alternativa viável face às lajes vigadas, quando tomadas as devidas precauções com os seus pontos críticos.

A rotura por punçamento ocorre sob uma forma tronco-cónica no perímetro do pilar, pelo que o uso de capitéis aumenta a área dessa mesma superfície, aumentando a resistência ao punçamento. O uso de armadura específica, em particular a armadura que atravessa essa mesma superfície aumenta também a capacidade resistente a punçamento da laje.

Pelo facto de a rotura por punçamento ser uma rotura frágil, e de a redistribuição dos esforços poder ser demasiado grande para ser absorvida pelos restantes pilares, é importante o correcto dimensionamento destas zonas em lajes fungiformes. Apesar de a regulamentação existente apresentar soluções para o dimensionamento, nem todos os edifícios a cumprem, ou por serem edifícios antigos, ou porque a regulamentação não foi cumprida, ou por alteração da funcionalidade do edifício, requerendo um aumento da capacidade resistente, sendo assim necessário o desenvolvimento de soluções de reforço para edifícios existentes que necessitem.

O uso de parafusos verticais pós-instalados é uma técnica de reforço simples, eficaz e fácil de aplicar, existindo já alguns ensaios feitos utilizando esta técnica.

O próximo passo seria verificar se há *software* capaz de prever o comportamento de uma laje reforçada com parafusos, sendo que seria mais uma ferramenta interessante para os engenheiros na resolução dos problemas.

Um dos problemas dessas análises seria o tempo de computação necessário para efectuar uma análise de qualidade, visto que as análises não lineares são bastante mais complicadas que as análises lineares, problema que, ao longo dos anos, vai desvanecendo com a evolução do poder computacional, diminuindo os tempos das análises a cada ano que passa, pelo que, se uma análise é viável agora, face aos custos de um ensaio em laboratório, mais o será daqui a uns anos, como exemplificado na Figura 1-1.

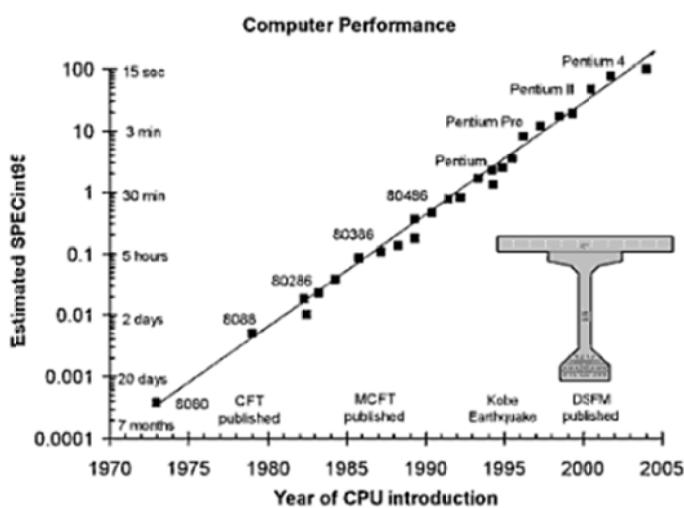


Figura 1-1 – Evolução do poder de computação [4]

## 1.2 Objectivos

Este trabalho tem como objectivo a modelação numérica de lajes reforçadas com parafusos verticais pré-instalados, modelando o seu comportamento face ao punçamento. Esta análise será feita através da utilização do *software* ATENA 3D.

O reforço de lajes com parafusos tem interesse pela sua intervenção mínima, exterior, rápida e económica. Pode ser utilizada como técnica de reforço ou reparação, tendo resultados eficazes. A sua boa modelação numérica permite o conhecimento de cargas de rotura e comportamentos das armaduras, sem necessitar de ensaios dispendiosos, sendo apenas necessário um *software* de elementos finitos que efectue análises não lineares e algumas horas de cálculo. Com o apuro deste tipo de ferramenta, será possível o estudo paramétrico desta solução, com custos inerentes muito inferiores, quando comparando com a situação de ensaios experimentais.

Já são conhecidos alguns resultados deste reforço, através dos ensaios realizados por Duarte [17]. Estes ensaios consistiam na aplicação de três diâmetros de parafusos diferentes, M6, M8 e M10, assim como um diferente aperto inicial para o diâmetro intermédio M8, e comparações de deslocamentos e extensões com um modelo de referência não reforçado.

Os dados obtidos mostraram uma melhoria na resistência para todos os reforços, assim como aumento da ductilidade da laje, permitindo deformações muito maiores na rotura. Como esperado, a laje reforçada com parafusos de maior diâmetro, M10, permitiu maior carga de rotura. Pelo contrário, o menor diâmetro, M6, permitiu uma menor carga de rotura, mas ainda assim superior à da laje de referência.

O objectivo deste trabalho é a modelação numérica das lajes ensaiadas, e a comparação dos resultados obtidos. Para tal, foram criados três modelos numéricos para cada laje a ensaiar, num total de 15, sendo que para cada laje será feita uma análise da influência do modelo de fissuração adoptado, o *Fixed Crack Model* e o *Rotated Crack Model* e uma análise da influência do refinamento da malha de elementos finitos utilizada.

### 1.3 Organização

Esta tese é constituída por 6 capítulos, que se estendem desde uma breve introdução ao fenómeno do punçamento, até aos ensaios numéricos efectuados e respectivas conclusões.

O Capítulo 2 descreve o problema do punçamento em lajes, descrevendo o mecanismo de rotura, assim como as diversas fases. Seguidamente são apresentados alguns modelos empíricos e analíticos, assim como modelos numéricos estudados por vários autores que tentaram descrever e prever este tipo de rotura tanto em lajes não reforçadas, como em lajes reforçadas. De forma a acompanhar a regulamentação em vigor, são apresentadas algumas recomendações de cálculo da norma NP-EN 1992-1 [10].

No Capítulo 3 são apresentadas as bases de um *software* de elementos finitos pelo princípio dos trabalhos virtuais, são descritos diversos modelos de fissuração e algumas características necessárias em análises não-lineares de elementos finitos, assim como algumas características do *software* utilizado, o ATENA 3D, referentes a modelos de constituição dos materiais.

O Capítulo 4 descreve os modelos ensaiados em laboratório por Duarte [17] e os modelos numéricos ensaiados nesta dissertação. Esta descrição inclui a geometria dos modelos,

materiais utilizados, a instrumentação utilizada para aquisição de dados e uma breve descrição da execução do ensaio.

O Capítulo 5 apresenta a análise dos dados obtidos nos ensaios, e comparação dos modelos de laboratório com os modelos numéricos. A comparação foi feita recorrendo a 4 características dos modelos: a extensão em determinadas armaduras, o deslocamento vertical em determinados pontos da laje, a evolução da carga nos parafusos, e a carga e modo de rotura.

O Capítulo 6 apresenta as principais conclusões dos resultados obtidos nos modelos numéricos e da respectiva comparação com os modelos experimentais.

## 2 ESTADO DA ARTE

### 2.1 Introdução

O punçamento é um dos problemas mais complicados na concepção de estruturas de betão armado. Por ser uma zona de descontinuidade geométrica, as regras para peças lineares não se aplicam, e há que procurar expressões que consigam prever o comportamento da peça de betão armado.

Para tal, desde o início do século XX que diversos investigadores realizaram centenas de ensaios para comparação com os modelos idealizados, e assim permitir o avanço do conhecimento. Apesar do estudo ter começado no início do século XX, através dos ensaios de Talbot [44], estes apenas incidiam sobre punçamento de paredes e pilares em elementos de fundação.

Nas décadas de 60/70, foram feitos numerosos ensaios sobre punçamento em lajes. Destes, apenas os ensaios de Ghali, Sargious e Huizer [20], incidiam sobre lajes reforçadas com parafusos. Mais recentemente, outros ensaios têm sido feitos, como os ensaios de Ramos [39], El-Sakawy et al [18], Harajli et al [21], Duarte [17], Luís [32] e Inácio [24].

Nos próximos tópicos são descritos o mecanismo de punçamento, alguns modelos propostos por diversos autores, expressões analíticas, modelos numéricos, assim como a legislação europeia vigente.

### 2.2 Mecanismo do fenómeno do punçamento

A rotura por punçamento em lajes ocorre devido à transferência de esforços (momentos flectores e esforço transverso) da laje para o pilar. Isto provoca um acumular de tensões numa área limitada por um mecanismo de rotura tronco-cónico, que leva a uma rotura frágil e repentina. Esta rotura pode levar a um colapso total da estrutura, devido ao aumento de esforços nos restantes elementos de suporte. A rotura por punçamento é composta por quatro fases [17]:

### i – Fase elástica-linear

Nesta fase ambos os materiais, o aço das armaduras e o betão, apresentam comportamentos elástico-linear, sem fendilhação ou cedência de armaduras.

### ii – Fase de resposta à flexão

Esta fase começa com o aparecimento de fendas de flexão, paralelas às faces do pilar, contornando-o em todo o perímetro. Surgem também fendas radiais, perpendiculares às faces do pilar, começando no pilar e propagando-se para o resto da laje, como representado na Figura 2-1.

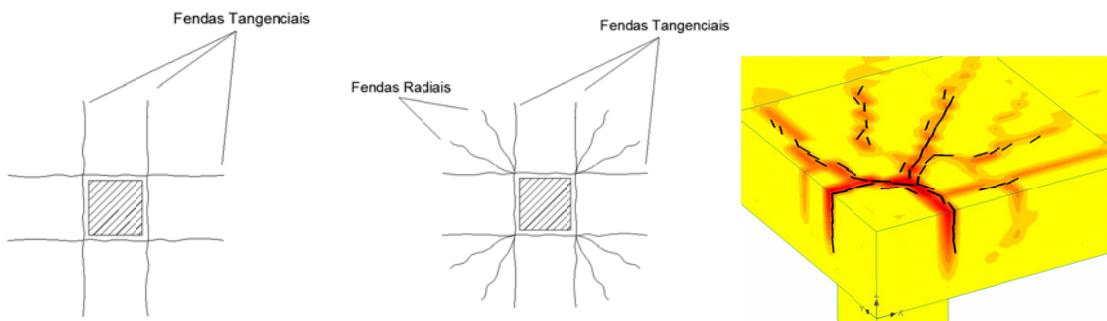


Figura 2-1 – Fendas tangenciais e radiais.

### iii – Fase de resistência ao corte

Nesta fase surgem fendas inclinadas, começando junto ao pilar (em lajes não reforçadas) ou junto à ultima fiada das armaduras específicas para o punçamento (em lajes reforçadas), na face inferior da laje, propagando-se para a parte superior da laje, com um ângulo entre 25 e 35 graus [40], formando o mecanismo tronco-cónico. Estas fendas vão aumentando a sua abertura até ocorrer a rotura por punçamento, como representado na Figura 2-2.

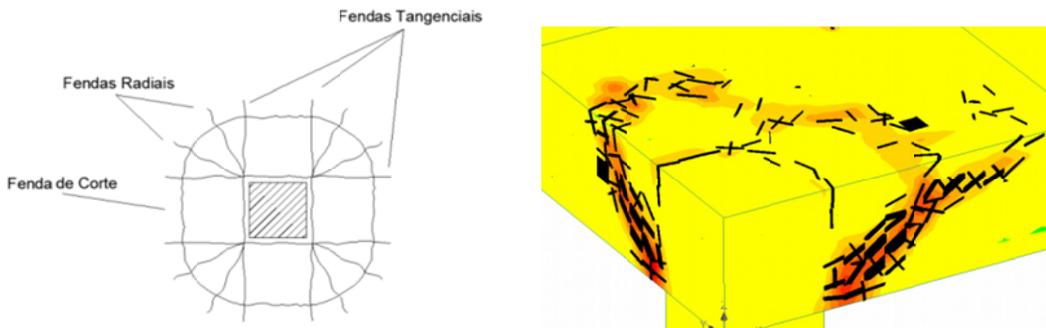


Figura 2-2 – Fendilhação de corte

#### iv – Fase pós-rotura

A abertura da fenda de punçoamento é perfeitamente visível, sendo que na separação, a zona junto ao pilar e a zona afastada do pilar apenas ficam unidas pelas armaduras que atravessam as duas. Esta separação está representada na Figura 2-3.

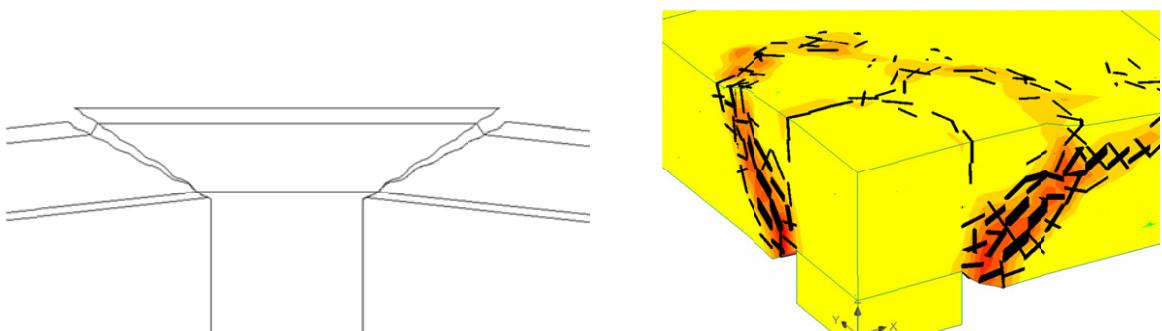


Figura 2-3 – Separação entre pilar e laje devido à abertura da fenda de corte

### 2.3 Modelos Empíricos e Analíticos

Neste capítulo serão apresentados alguns modelos empíricos e analíticos criados por diversos autores para a previsão da carga de rotura por punçoamento.

#### 2.3.1 Kinnunen e Nylander, 1960

O modelo proposto por Kinnunen e Nylander [30] foi baseado em 61 ensaios em lajes circulares, com colunas circulares. Foi idealizado, adaptando a teoria criada para lajes circulares com armaduras circulares para lajes armadas em duas direcções ortogonais, adoptando um coeficiente de correção para compensar o efeito de ferrolho.

O modelo foi idealizado garantindo equilíbrio de forças, sendo que o elemento considerado é limitado lateralmente pelas fendas radiais, e interiormente pela fenda de corte tronco-cónica, ver Figura 2-4. Quando carregada, a laje tem um centro de rotação localizado no início da fenda de corte. A rotura é atingida quando a extensão limite do betão é atingida na face inferior da laje.

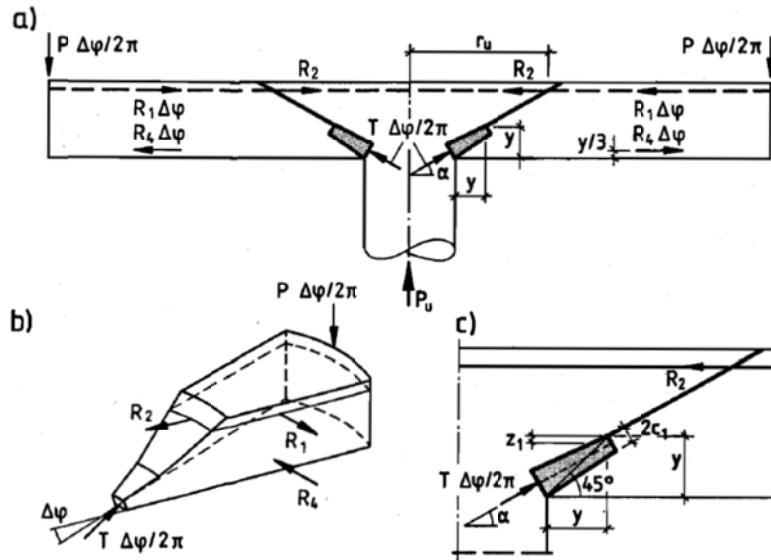


Figura 2-4 – Modelo Mecânico de Kinnunen e Nylander [30]

A resistência última é obtida igualando iterativamente as expressões (2.1) e (2.2).

$$V_{u,c} = k \cdot \pi \cdot \eta \cdot d^2 \cdot k_x \cdot \frac{1 + \frac{2 \cdot k_x}{\eta}}{1 + \frac{k_x}{\eta}} \cdot \sigma_{cu} \cdot f(\alpha) \quad (2.1)$$

$$V_{u,s} = k \cdot 4\pi \cdot \rho \cdot f_y \cdot d \cdot r_f \cdot \left[ 1 + \ln \left( \frac{\delta d}{2 \cdot r_u} \right) \right] \cdot \frac{1 - \frac{k_x}{3}}{\delta - \eta} \quad (2.2)$$

Onde:  $\eta = \frac{c_2}{d}$  ,  $f(\alpha) = \frac{\tan \alpha \cdot (1 - \tan \alpha)}{\tan^2 \alpha}$  e  $\delta = \frac{l_{slab}}{d}$

A primeira expressão depende da resistência última do betão e resulta da equação de equilíbrio de forças verticais, onde  $\alpha$  indica a inclinação da rotura tronco-cónica,  $k_x$  representa a percentagem da área comprimida,  $\sigma_{cu}$  representa a tensão resistente à compressão do betão em provetas cúbicos e  $d$  representa a altura útil da laje. A expressão depende também de um factor de correção,  $k$ . Na expressão está também presente um parâmetro  $\eta$ , que está dependente de  $c_2$ , que é uma característica geométrica da laje, e de  $d$ , que representa a altura útil da laje.

A segunda expressão resulta da equação de equilíbrio de momentos, e depende da tensão de cedência do aço  $f_y$ , da percentagem de armadura da laje  $\rho$ , e das dimensões da laje, assim como o raio do cone de punçamento no interior da laje  $r_f$ . Na expressão está

presente também o parâmetro  $\delta$  que depende da geometria da laje, nomeadamente do vão e da altura útil.

Esta expressão apenas é válida quando a tensão de cedência das armaduras é atingida dentro do cone de punçoamento, sendo que são propostas duas expressões adicionais para diferentes localizações da cedência das armaduras.

### 2.3.2 Moe, 1960

O modelo desenvolvido por Moe [34] foi definido para lajes rectangulares.

O modelo foi criado considerando dois estados limite da laje, a força última de flexão,  $V_{flex}$  e a força última de resistência ao esforço transverso,  $V_{shear}$ , relacionando-as para obter a capacidade última da laje, conforme a expressão (2.3).

$$\frac{V_u}{V_{shear}} + A \frac{V_u}{V_{flex}} = 1 \quad (2.3)$$

Em que o parâmetro A é um parâmetro de calibração obtido experimentalmente através dos ensaios realizados.

Moe [34] apresentou também expressões para a determinação da resistência última da laje e para a força última de flexão, sendo que estas dependem de parâmetros como a resistência sob compressão do betão, da tensão de cedência do aço, da percentagem de armadura na laje, das dimensões da laje, nomeadamente a altura útil.

Todas as expressões determinadas por Moe [34], têm uma base empírica, tendo sido adaptadas aos resultados obtidos nos ensaios, e, pelo facto de a teoria ter por base modelos geométricos e leis dos materiais, o modelo peca por não definir um modelo físico de rotura [5].

### 2.3.3 Bræstrup Nielsen, 1976

O modelo de Bæstrup e Nielsen [8] é baseado numa análise plástica do mecanismo de rotura.

A resistência última é obtida comparando o trabalho das forças actuantes, com a energia de fractura do cone de punçoamento. O cone utilizado consiste num troço inicial recto, junto ao pilar, e uma curva catenária na restante zona do cone. Esta rotura está representada na Figura 2-5.

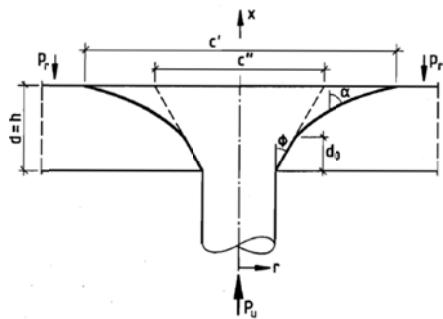


Figura 2-5 – Cone de rotura do modelo de Braestrup et al [8]

O modelo assume as seguintes premissas:

- O betão é um material perfeitamente plástico.
- O critério de rotura adoptado é o da lei de Coulomb.
- A resistência à tracção do betão adoptada tem de ser muito baixa, sendo os melhores resultados são obtidos na ordem de um valor 400 vezes menor que a resistência à compressão ( $f_{ct}=f_c/400$ ).

A resistência última é definida pela soma da resistência da zona cónica do modelo de rotura com a resistência da zona de catenária do modelo de rotura. Esta expressão de força última requer algumas iterações, de modo a obter o valor mínimo dessa força.

O modelo fornece resultados que estabelecem o limite superior para as forças últimas, devido às premissas assumidas para o comportamento do betão, visto que são demasiado simplistas para o seu comportamento. O modelo também não contempla a percentagem de armadura presente na laje.

### 2.3.4 Shehata Simplificado, 1990

Este modelo foi criado observando os ensaios efectuados em lajes circulares, em particular o modo de rotura, a fendilhação e a deformação. Tal como o modelo de Kinnunen/Nylander [30], utiliza ensaios de laje circulares e um elemento radial, limitado lateralmente por fendas radiais e no interior pela fenda de corte. A carga considerada apresenta simetria radial e era aplicada apenas perto do bordo da laje. Foi assumido que estes elementos são rígidos, e têm rotação em torno do eixo central do pilar [42]. A rotura, assim como o equilíbrio de forças idealizado estão representados na Figura 2-6.

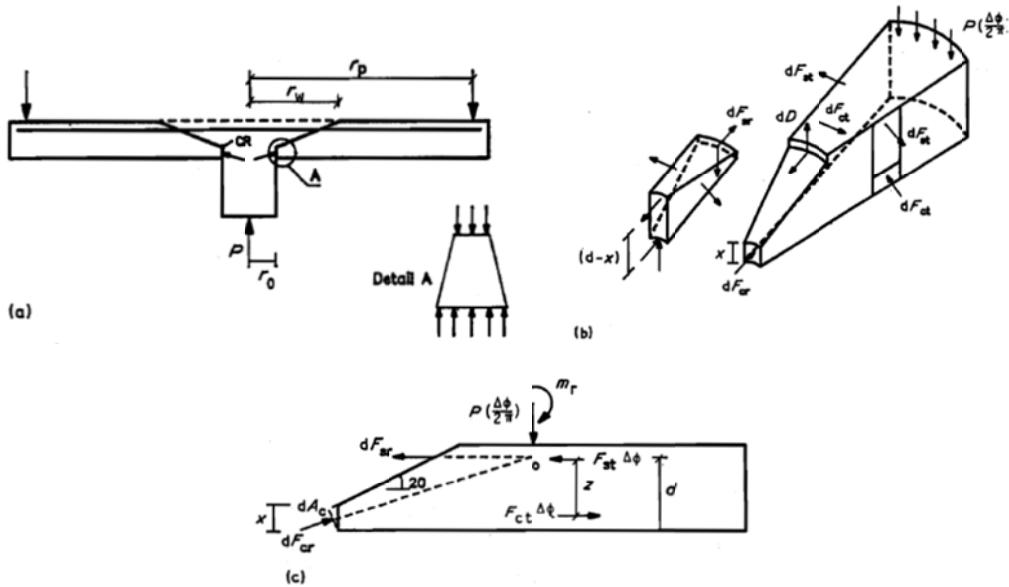


Figura 2-6 – Modelo mecânico, elemento rígido e equilíbrio e forças [42]

Através dos elementos escolhidos, foram feitos quatro equilíbrios de forças:

No interior do elemento, relacionando as forças de compressão na face inferior com as forças de tracção na armadura na face superior, resultando na expressão (2.4), que depende das forças de compressão no betão e de tracção nas armaduras.

$$\sum H^{ring} \quad F_{st} \Delta \phi = F_{ct} \Delta \phi \quad (2.4)$$

Na zona de contacto do elemento com o cone de punçamento, igualando as forças na direcção horizontal que atravessam esse mesmo cone. O equilíbrio é feito através da força horizontal nas armaduras,  $F_{sr}$ , e pela projecção horizontal da força de compressão no betão,  $F_{cr}$ .

$$\sum H^{radial} \quad dF_{sr} = dF_{cr} \cdot \cos 10^\circ \quad (2.5)$$

O somatório de forças verticais no elemento radial, onde se relaciona a carga aplicada, com a componente vertical da força de compressão na face inferior do contacto com a coluna.

$$\sum V \quad P(\Delta \phi / 2\pi) = dF_{cr} \cdot \sin 10^\circ \quad (2.6)$$

Fazendo um somatório no ponto 0, ponto que está situado na intersecção da projecção vertical do ponto de aplicação da carga com a armadura longitudinal superior. Neste ponto, a única força que provoca momento, é a força de compressão na face inferior da laje,  $F_{ct}$ , com um braço  $z$ , que corresponde à altura entre o centro da zona comprimida e o centro das armaduras.

$$\sum M^o \quad m_r = F_{st} \cdot \Delta\phi \cdot z = F_{ct} \cdot \Delta\phi \cdot z \quad (2.7)$$

Através de estes equilíbrios é então obtida a expressão para a carga última da laje, que é então dada pela equação (2.8), e depende do raio da coluna utilizada,  $r_0$ , de um factor de correção,  $n_c$ , e da resistência à compressão do betão em provetas cilíndricos,  $f_c$ .

$$P_u = 2\pi \cdot r_0 \cdot x \cdot n_c \cdot f_c \cdot \tan 10^\circ \quad (2.8)$$

São ainda definidos três tipos de rotura:

Se o ângulo formado pela força de compressão atingir  $20^\circ$ , as tensões principais de tracção ocorrem na zona comprimida e ocorre a separação do betão.

Se a deformação atingir os valores de rotura do betão,  $\varepsilon = 3,5 \times 10^{-3}$ , na zona junto ao pilar na face inferior da laje, ocorre esmagamento do betão.

Se as extensões tangenciais atingirem o valor de rotura do betão,  $\varepsilon = 3,5 \times 10^{-3}$ , a uma altura  $x$  (correspondente à altura da zona de compressão), junto ao pilar na face inferior da laje, ocorre esmagamento tangencial do betão.

### 2.3.5 Menétrey, 1996

A expressão analítica criada por Menétrey [33] teve por base resultados obtidos em ensaios do mecanismo de rotura por punçamento. Uma das grandes vantagens trazidas é o facto de o modelo contemplar a existência de armaduras principais ortogonais, armaduras de reforço para resistência ao punçamento, assim como a contribuição de cabos de pré-esforço.

Este modelo integra um modelo de escoras e tirantes, sendo que a rotura é provocada pela falha de um tirante de betão que atravessa o cone de punçamento, pelo que a resistência à tracção do betão se torna muito importante. Para obter a carga de rotura, é necessário integrar estas componentes verticais, radialmente, ao longo do cone de punçamento. Para

levar em conta as armaduras de reforço, a contribuição das mesmas deverá ser somada a essa integração.

Assim, o punçoamento resistente será dado pela soma de diversas parcelas, a componente vertical do tirante de betão,  $F_{ct}$ , o efeito de ferrolho das armaduras de flexão,  $F_{dow}$ , a componente das armaduras de reforço,  $F_{sw}$ , e a componente vertical dos cordões de pré-esforço,  $F_p$ , resultando na expressão (2.9).

$$F_{pun} = F_{ct} + F_{dow} + F_{sw} + F_p \quad (2.9)$$

Estas forças encontram-se representadas na Figura 2-7.

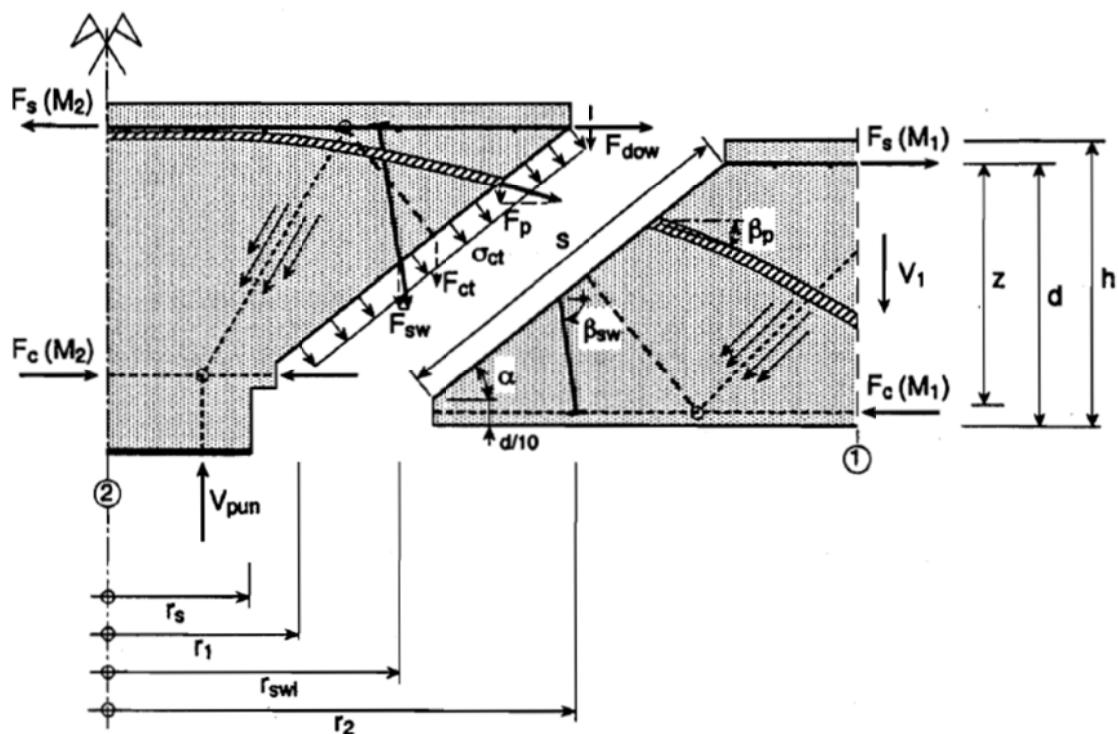


Figura 2-7 – Representação das forças intervenientes na resistência ao punçoamento [33]

A figura tem representadas as forças mencionadas anteriormente, assim como algumas grandezas geométricas necessárias para o cálculo das mesmas.

Na horizontal estão definidos diversos raios, medidos horizontalmente desde o centro da laje, até diferentes distâncias. O  $r_s$  é medido até ao limite da coluna. O  $r_1$  é medido até ao início do cone de punçoamento na face inferior da laje. O  $r_{sw1}$  é medido até ao reforço transversal da laje. O  $r_2$  é medido até ao fim do cone de punçoamento, na face superior da laje.

Na vertical estão mencionadas a altura da laje,  $h$ , a altura útil da laje,  $d$ , e o braço do binário das forças interiores,  $z$ .

Para o cálculo da resistência última, tem de se considerar uma interacção entre o punçamento resistente e a capacidade de resistência à flexão. Esta interacção leva em conta a inclinação do cone de punçamento, como se pode observar na expressão (2.10).

$$F_{fail} = F_{pun} + (F_{flex} - F_{pun}) \left\{ \sin\left(\frac{3}{2}\alpha - 45\right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ para } 30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \quad (2.10)$$

Pode-se observar que para uma inclinação de 30 graus, a força última é igual ao punçamento resistente, assim como para uma inclinação de 90 graus, a força última corresponde à resistência à flexão.

### 2.3.5.1 Resistência à tracção do Betão

Esta resistência conta com a transferência ao longo do cone de punçamento, apenas de forças perpendiculares ao cone, não transferindo atrito entre as fendas.

O cone desenvolve-se ao longo dos raios  $r_1$  até ao raio  $r_2$ . O raio  $r_1$  é assumido como um décimo da profundidade do cone de punçamento somado ao raio do pilar e o raio  $r_2$  é assumido como a profundidade do cone de punçamento somado ao raio do pilar.

$$r_1 = r_s + \frac{1}{10} \frac{d}{\tan \alpha} \quad (2.11)$$

$$r_2 = r_s + \frac{d}{\tan \alpha} \quad (2.12)$$

Isto cria uma superfície de rotura correspondente a:

$$S = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s \quad (2.13)$$

Onde  $s = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (0,9d)^2}$

Simplificadamente, a tensão de tracção no betão é admitida constante ao longo da superfície do cone de punçamento, pelo que se obtém assim a força resistente do betão, de acordo com a expressão (2.14).

$$F_{ct} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s \cdot \sigma_v = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s \cdot f_{ct}^{\frac{2}{3}} \cdot \xi \cdot \eta \cdot \mu \quad (2.14)$$

Esta expressão leva em conta a resistência à tracção do betão,  $f_{ct}$ , a percentagem de armadura,  $\xi$ , o efeito de escala para a espessura da laje,  $\eta$ , e o raio de início do cone de punçoamento,  $\mu$ . Estes parâmetros são determinados de acordo com as expressões (2.15), (2.16) e (2.17).

$$\xi = \begin{cases} -0,1 \cdot \rho^2 + 0,46 \cdot \rho + 0,35 & 0 < \rho < 2\% \\ 0,87 & \rho \geq 2\% \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\mu = 1,6 \left( 1 + \frac{d}{d_a} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

$$\eta = \begin{cases} 0,1 \left( \frac{r_s}{h} \right)^2 - 0,5 \left( \frac{r_s}{h} \right) + 1,25 & 0 < \frac{r_s}{h} < 2,5 \\ 0,625 & \frac{r_s}{h} \geq 2,5 \end{cases} \quad (2.17)$$

Nas expressões anteriores,  $\rho$  representa a taxa de armadura em percentagem,  $d_a$  representa a dimensão máxima do agregado,  $h$ , a altura da laje, e  $r_s$  o raio do pilar.

### 2.3.5.2 Efeito de Ferrolho

Este efeito é importante, especialmente em lajes com armaduras ortogonais, onde é responsável por cerca de 34% da resistência ao punçoamento, segundo os ensaios de Regan e Braestrup [5]. A expressão da contribuição deste efeito foi adoptada do CEB-FIP model code 1990 [3], que está na expressão (2.18).

A expressão tem em conta variáveis como os diâmetros das armaduras,  $\Phi_s$ , resistências à compressão do betão e à tracção das armaduras,  $f_c$  e  $f_t$ , e a inclinação da fenda de punçoamento,  $\alpha$ .

$$F_{dow} = \frac{1}{2} \sum^{barras} \phi_s^2 \sqrt{f_c f_t (1 - \zeta^2)} \cdot \text{sen } \alpha \quad (2.18)$$

Esta expressão tem em conta o número de varões que atravessa o cone, o seu diâmetro, as resistências do betão à compressão e do aço à tracção. Existem dois factores de correcção para o facto de as armaduras não atravessarem as fendas exactamente na perpendicular, o  $\text{sen}(\alpha)$ , para corrigir o plano vertical, e o valor  $\frac{1}{2}$ , para corrigir o plano horizontal. Há também um parâmetro,  $(1 - \zeta^2)$ , que minora a resistência ao efeito de ferrolho, com a tensão normal já instalada na armadura, dado por:

$$\zeta = \frac{\sigma_s}{f_t} \quad (2.19)$$

e onde  $\sigma_s = \frac{\frac{F_{pun}}{\tan \alpha}}{\sum_{\text{barras}} A_s}$

Esta parcela corresponde à força de uma escora paralela ao cone de punçamento, projectada na horizontal, e dividida pelas armaduras traccionadas que atravessam esse mesmo cone.

### 2.3.5.3 Contribuição da armadura de reforço

Para a contribuição de armaduras de reforço é necessário ter em conta os diferentes mecanismos de rotura possíveis, exemplificados na Figura 2-8:

- Rotura pelo interior da zona reforçada, onde o cone de punçamento se inicia na face inferior da laje, junto ao pilar, e acaba na parte superior, junto à primeira fiada de armaduras de reforço. Neste caso, a força última deve ser calculada sem armaduras de reforço, considerando o ângulo correspondente na interacção entre o punçamento e a resistência à flexão. Este tipo de rotura está representado na Figura 2-8 a).
- Rotura pelo exterior das armaduras de reforço, onde o cone se inicia na face inferior da laje, junto à última fiada de armaduras de reforço. Neste caso, a resistência última deve ser calculada considerando um raio correspondente ao raio da última linha de armaduras de reforço (ao invés de utilizar o raio do pilar), não considerando as armaduras de reforço. Este tipo de rotura está representado na Figura 2-8 b).
- Rotura através da zona reforçada, onde a fenda é atravessada pelas armaduras de reforço, considerando a resistência das armaduras de reforço. Este tipo de rotura está representado na Figura 2-8 c).

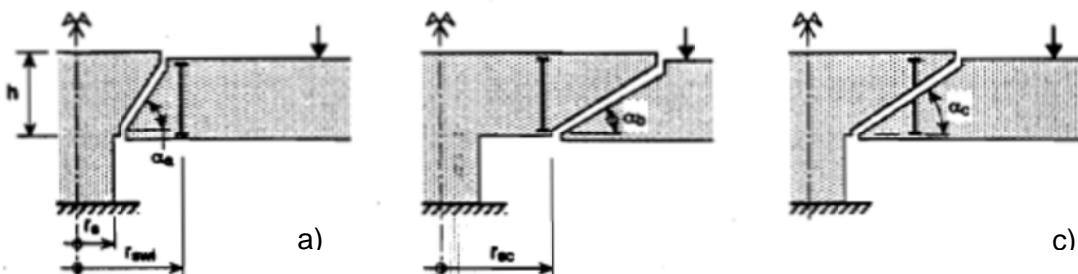


Figura 2-8 – Modos de rotura em lajes reforçadas [33]

Foram também definidos casos diferentes para diferentes tipos de reforço, de acordo com a sua capacidade de aderência. No caso de pouca aderência temos barras e parafusos não aderentes, e no caso de alta aderência são considerados estribos, varões nervurados e parafusos injectados com ligantes.

Para o caso de baixa aderência é utilizado o conceito de energia de fractura para obter a abertura da fenda de punçamento, e assim, a extensão no varão, que causa o carregamento do varão.

A contribuição dos reforços pode assim ser dada pela expressão (2.20), que depende da área de armadura utilizada,  $A_{sw}$ , do módulo de elasticidade das mesmas,  $E_{sw}$ , assim como da energia de fractura,  $G_f$ , e resistência à compressão do betão,  $f_{ct}$ . Depende também de parâmetros geométricos como o comprimento da armadura,  $l$ , e da inclinação das armaduras,  $\beta_{sw}$ .

$$F_{sw} = \sum_{varões}^{varões} A_{sw} E_{sw} \frac{5G_f}{f_{ct} \cdot l \cdot \cos(\alpha)} \sin(\beta_{sw}) < \sum_{varões}^{varões} A_{sw} f_{sw} \sin(\beta_{sw}) \quad (2.20)$$

Onde na primeira expressão, a contribuição é dada pelo produto da área pela extensão do parafuso, pelo módulo de elasticidade e pelo seno do ângulo que o reforço faz com a horizontal, e a segunda expressão limita a tensão resistente do parafuso à sua tensão de cedência.

No caso de alta aderência, apenas é considerado a limitação anterior, e é considerada a tensão total do parafuso, considerando que existe comprimento suficiente para a transmissão da força do parafuso para o betão, através de tensões de aderência.

$$F_{sw} = \sum_{varões}^{varões} A_{sw} f_{sw} \sin(\beta_{sw}) \quad (2.21)$$

#### 2.3.5.4 Contribuição dos cabos de pré-esforço

Os cabos de pré-esforço são considerados de forma semelhante às armaduras de reforço de alta aderência, que corresponde à projecção vertical da força de pré-esforço.

$$F_p = \sum_{cabos}^{cabos} A_p \sigma_p \sin(\beta_p) \quad (2.22)$$

O facto de ser utilizada a tensão de pré-esforço e não a tensão de cedência dos cabos, está relacionada com o facto de que o mecanismo de rotura do punçamento não permite as deformações necessárias para se atingir as extensões de cedência dos cabos de pré-esforço [5].

## 2.4 Modelos Numéricos

No capítulo 2.4 são apresentados alguns ensaios numéricos do punçamento de lajes, efectuados por diversos autores. São apresentados modelos numéricos a 2 dimensões, bem como modelos mais complexos a 3 dimensões. São apresentados modelos não reforçados, assim como modelos com armaduras específicas para o punçamento.

### 2.4.1 Ožbolt e Vocke (MASA), 1999

Os modelos apresentados por Ožbolt e Vocke [38] tiveram como objectivo a verificação dos resultados obtidos pelo software utilizado. O software utilizado, de nome MASA, **MA**croscopic **S**pace **A**nalysis, foi desenvolvido com base no *Microplane Model*, com recurso a limitadores de danos, como a *Crack Band Theory*. Foram utilizados elementos finitos de 8 nós para os elementos de betão e elementos de barra com comportamento elasto-plástico para as armaduras. Os ensaios foram feitos recorrendo aos eixos de simetria, de modo a minimizar o esforço computacional, e impondo o deslocamento no ponto central do pilar, de modo obter-se resultados pós-rotura. Como apoios, foram colocados apoios verticais, em dados pontos da laje, num total de 3 por cada quarto de laje simulada. Nesses pontos, os elementos finitos de betão foram alterados de modo a terem um comportamento linear, para evitar rotura local.

Os resultados numéricos obtidos mostraram uma rotura semelhante aos ensaios experimentais, com a formação de um cone de punçamento, conforme o mostrado na Figura 2-9.

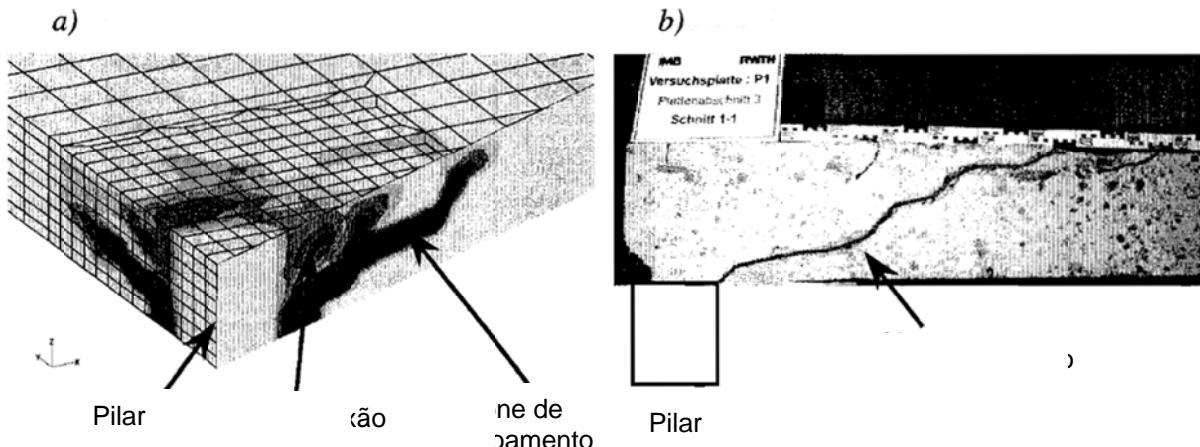


Figura 2-9 – Cones de Rotura: a) Simulação numérica (Extensões Principais) b) Ensaio laboratorial [38]

A análise forneceu valores para a carga de rotura muito semelhantes aos experimentais, mas quanto ao comportamento pós-rotura, a simulação apresentou um comportamento mais dúctil que o real, justificado com problemas de convergência no regime pós-rotura.

Posteriormente foram feitos estudos para verificar a influência de vários parâmetros na resistência ao punçamento. Desses parâmetros, verificou-se que os que mais influenciam a carga de rotura são a energia de fractura e a percentagem de armadura da laje, e, de acordo com os autores, a resistência ao punçamento varia aproximadamente com a raiz cúbica destes valores, o que é semelhante ao proposto pelo Eurocódigo 2, que entra com os valores da raiz cúbica da percentagem de armadura e da resistência à compressão do betão.

#### 2.4.2 Beutel e Hegger, 1998

O objectivo dos modelos de Beutel et al [6] era verificar a capacidade de previsão da rotura e comportamento até à rotura, do punçamento em lajes com armaduras específicas de punçamento. Os modelos são semelhantes aos de Ožbolt e Vocke [38], com elementos sólidos *Brick* de 8 nós, armaduras simuladas com elementos de barra, e armaduras específicas simuladas com vários arranjos de elementos de barra, de modo a verificar qual a organização que traduz melhores resultados para estes elementos. Estes arranjos estão na Figura 2-10.

Após diversos ensaios, o modelo que melhor aproximou os resultados foi o da Figura 2-10, tipo d).

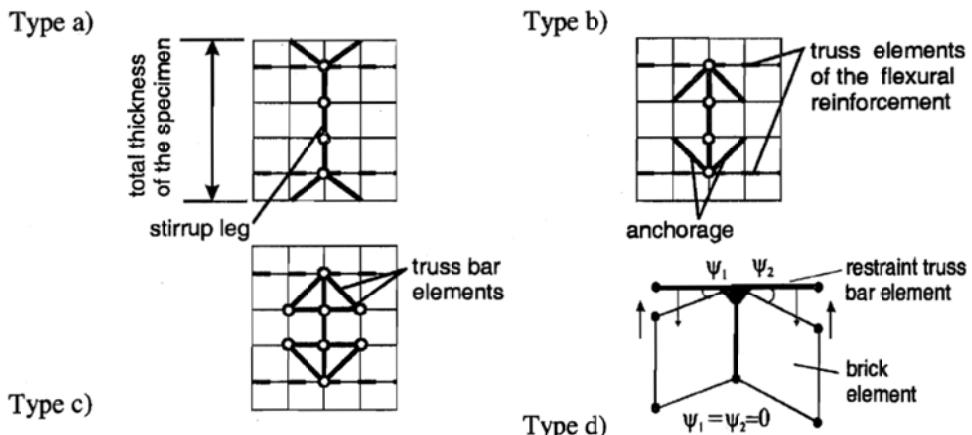


Figura 2-10 – Tipos de elementos de barra usados para simular armadura específicas [6]

Para a comparação, foram utilizados modelos com diferentes tipos de rotura:

- Rotura pelo interior da zona reforçada
- Rotura por esmagamento de betão na face inferior da laje, junto ao pilar
- Rotura pelo exterior da zona reforçada

Os resultados obtidos para a rotura no interior da zona reforçada foram bastante satisfatórios, sendo a carga última, obtida numericamente, cerca de 90% da carga última do ensaio experimental, o que foi justificado pela não contribuição das armaduras para o efeito de ferrolho no cone de punçamento. Quanto ao comportamento da laje, o modelo numérico apresenta um comportamento inicial mais rígido, sendo que a rotura ocorre para deslocamentos menores que os obtidos nos ensaios experimentais.

O modelo utilizado para as armaduras específicas, através de elementos de barra e elementos de restrição de movimento, Figura 2-10 tipo d), apresentam valores perfeitos para a evolução dos esforços ao longo do carregamento.

Para a rotura pelo exterior do reforço, foi estudado o incremento da resistência, com o aumento do número de fiadas de armaduras específicas para a resistência ao punçamento já descritas anteriormente. Verificou-se que o uso de duas fiadas ou menos tem um aumento de carga de rotura baixo, mas o uso de três fiadas de armadura já fornece uma carga de rotura bastante superior.

Como estudo de comparação, foi verificada a influência do espaçamento dos reforços, quer ao pilar, quer entre dois reforços consecutivos.

Para a influência da distância do primeiro reforço à face do pilar, nos resultados obtidos, verificou-se que a resistência máxima ocorreu para uma distância de cerca de 0,8.d medidos

desde a face do pilar, até ao primeiro reforço. Este valor é superior ao recomendado pelo Eurocódigo 2, que recomenda que o primeiro reforço se localize entre 0,3.d e 0,5.d.

Quanto à influência do espaçamento entre reforços consecutivos, verificou-se que o aumento do espaçamento levou a uma diminuição da carga última, tendo os ensaios sido feitos a partir de distâncias de 1.d, valor que nem permitiu a mobilização da carga máxima. Isto levou o autor a recomendar distâncias de 0,5.d para a primeira fiada, e 0,75.d para as restantes fiadas, valores estes que correspondem aos valores máximos permitidos pelo Eurocódigo 2.

#### 2.4.3 Staller (MARC), 2000

Os modelos de Markus Staller [43] sobre o punçamento em lajes, foram feitos com recurso ao software MARC. As análises foram feitas com recurso a elementos iso-paramétricos de 8 nós, elementos de barra para modelação da armadura, assumindo uma ligação perfeita, e um modelo de fissuração distribuída, o *Fixed Crack Model*. Foi aproveitada a simetria, de modo a simular apenas  $\frac{1}{4}$  da laje.

Os critérios de rotura utilizados foram o de Von Mises para o aço, e o de Drucker/Prager para o betão, sendo que o modelo do betão incluía uma fase bilinear de amolecimento para as tensões de tracção.

Dos resultados obtidos, pôde concluir que apesar de uma diferença de 15% na carga de rotura, a superfície tronco-cónica de rotura obtida foi próxima da experimental como ilustrado na Figura 2-11.

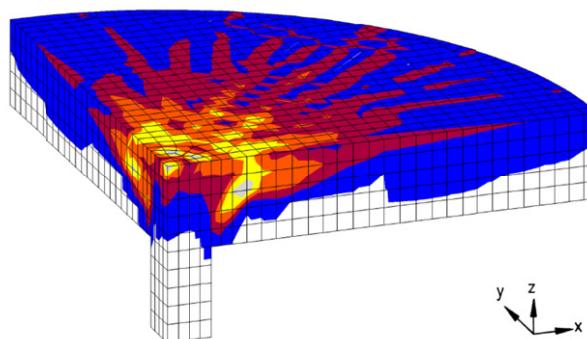


Figura 2-11 – Ilustração das extensões principais na rotura [43]

Staller [43] efectuou também estudos paramétricos para verificar a influência da espessura da laje e a influência da resistência do betão na resistência ao punçamento.

Dos resultados obtidos, foi possível observar que a diminuição da espessura da laje, para além da diminuição da carga última, traz um grande aumento de ductilidade.

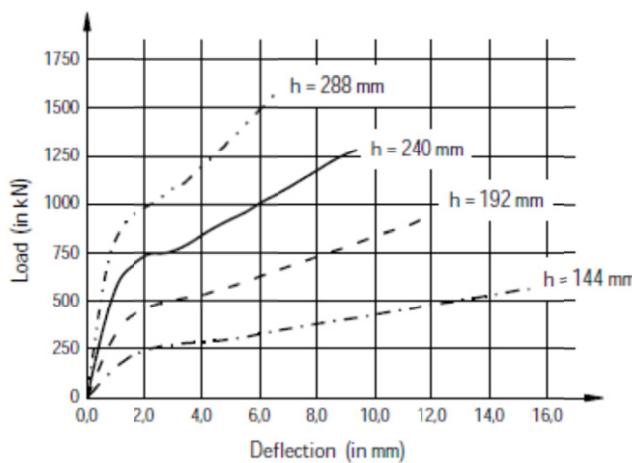


Figura 2-12 – Influência da espessura da laje na resistência ao punçamento [43]

O aumento da resistência do betão leva a um aumento da carga última, a um ligeiro aumento da ductilidade da laje, e também a uma maior fase linear elástica inicial, onde a laje responde com um comportamento elástico. É de notar que a resistência do betão (sob compressão) não foi o único parâmetro alterado neste ensaio, pois leva a alterações na resistência à tracção e na energia de fractura do modelo de elementos finitos do betão.

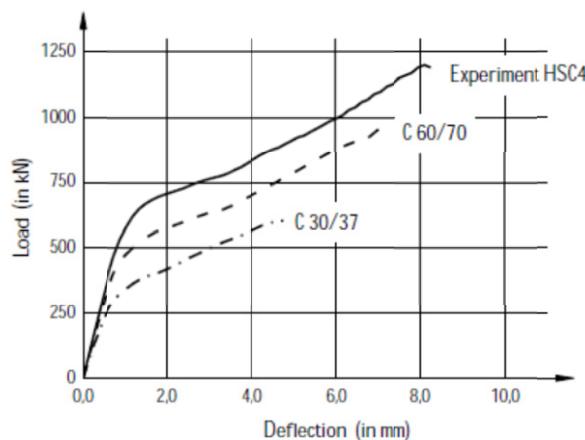


Figura 2-13 – Influência da resistência do betão na resistência ao punçamento [43]

#### 2.4.4 Trautwein et al. (2006) (DIANA)

Os modelos elaborados por Trautwein et al. [45] tiveram por base o *software* de elementos finitos DIANA. O *software* tem a sua base na fissuração distribuída, mais especificamente o *Multiple Fixed Crack Model* com um critério de rotura Mohr-Coulomb. Foram utilizados

comportamentos elasto-plásticos para as armaduras e para o betão antes da fendilhação. Posteriormente à fendilhação por tracção foi considerado um ramo bilinear descendente no diagrama tensão deformação do betão, sendo que a parte bilinear representa os efeitos da interacção entre o betão e as armaduras. A malha utilizada, assim como a distribuição de armaduras encontram-se na Figura 2-14 e é constituída por elementos finitos de 8 nós e por armaduras com área equivalente à área total das armaduras presentes no ensaio.

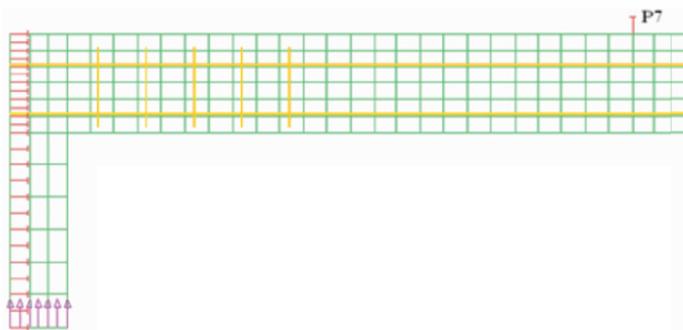


Figura 2-14 – Malha de elementos finitos e disposição de armaduras [45]

Foram ensaiadas 3 lajes, a laje M1, sem qualquer tipo de reforço, e outras duas, M2 e M3 com conectores de 10 mm de diâmetro, variando o espaçamento radial dos conectores e o número de fiadas a utilizar.

Os resultados obtidos foram muito próximos dos ensaiados, para todos os modelos, aproximando a carga de rotura assim como o modo de rotura e inclinações dos cones de rotura. Foram obtidos erros de 2% na carga de rotura para o modelo M1, de 6% para o modelo M2 e de 9% para o modelo M3. Os modos de rotura estão ilustrados na Figura 2-15.

Quadro 2-1 – Resultados obtidos nos ensaios de Trautwein et al [45]

Laje	Carga de Rotura [kN]		Erro
	Experimental	FE	
M1	309	304	2%
M2	460	432	6%
M3	472	432	9%

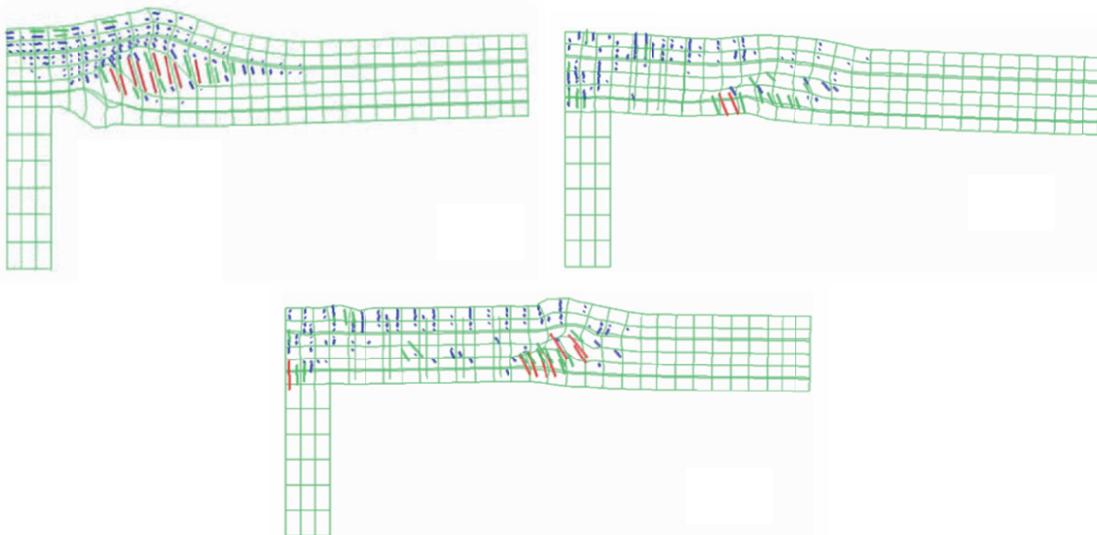


Figura 2-15 – **Cima** Esquerda – Rotura M1; Direita – Rotura M2; **Baixo** – Rotura M3 [45]

Dos ensaios, os autores concluíram que foram obtidos resultados bastante satisfatórios, para a carga de rotura, para as curvas carregamento-flecha, e para o modo de rotura.

#### 2.4.5 Belakhdar, 2008

Os ensaios de Belakdhar [2] tiveram como objectivo a simulação de 3 lajes reforçadas com parafusos, com diferentes fiadas de armaduras de reforço, assim como um modelo de referência. Posteriormente foi feito um estudo paramétrico, variando o diâmetro dos parafusos utilizados.

Os modelos utilizados para a simulação do betão incluíam um comportamento não linear na resistência à compressão com uma forma linear no troço inicial e forma parabólica no troço restante, um modelo bilinear para a fase de resistência à tracção, redução da resistência à compressão e de corte em betão fendilhado, e redução da extensão última com o aumento da classe do betão. Para o aço, foi modelado um comportamento elasto-plástico perfeito e com um modelo de aderência perfeita entre as armaduras e o betão. Foi também utilizado o modelo de fendilhação *Fixed Crack Model*. Para aproveitar a simetria do modelo, foi simulada apenas 1/4 da laje original.

Para a convergência foi utilizado o método Newton-Raphson modificado, através da convergência da carga aplicada.

A malha utilizada encontra-se ilustrada na Figura 2-16.

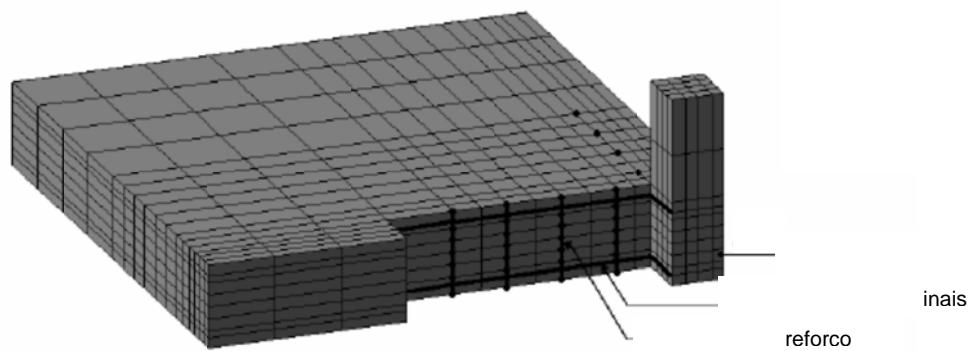


Figura 2-16 – Malha de Elementos Finitos utilizada por Belakhdar [2]

Como esperado, todas as lajes reforçadas obtiveram cargas de rotura superiores à carga de rotura obtida no modelo de referência, não reforçado. O efeito do número de fiadas evidenciou-se a nível de carga de rotura e de deslocamentos até à rotura, como mostrado na Figura 2-17.

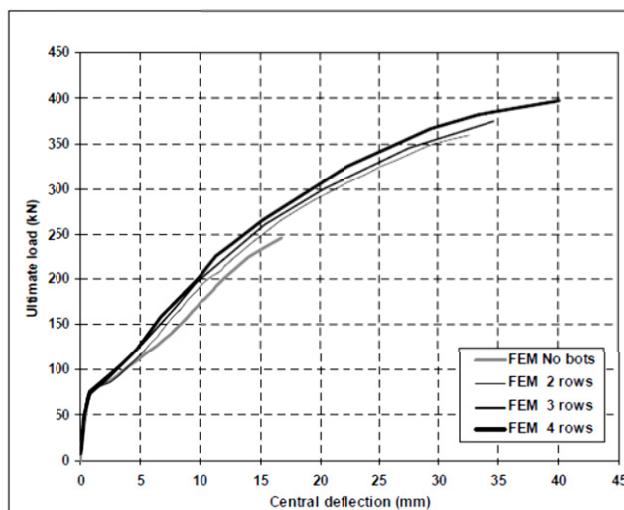


Figura 2-17 – Influência do número de fiadas no comportamento da laje [2]

Quanto à variação do diâmetro dos parafusos, o aumento do diâmetro não teve efeito antes da fendilhação, mas, após fendilhação, resultou numa laje ligeiramente mais rígida, num aumento dos deslocamentos na rotura e num aumento da carga de rotura.

A diferença da carga na rotura aumenta para um maior número de fiadas, como se pode observar na Figura 2-18. A grande diferença para as cargas obtidas na última laje, com 4 fiadas de armadura, pode ser explicada se a rotura tivesse ocorrido pelo interior do reforço, apesar de o autor nada referir sobre o modo de rotura dos modelos.

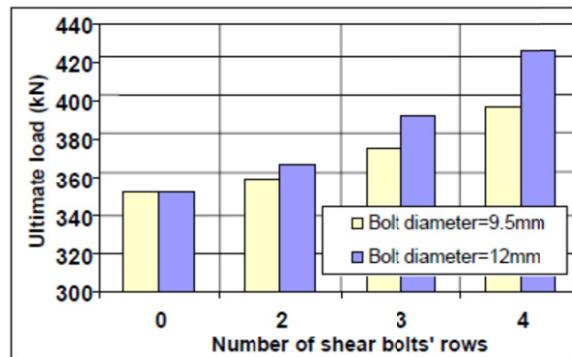


Figura 2-18 – Influência do número de fiadas de armadura de reforço na resistência ao punçamento [2]

#### 2.4.6 Inácio, 2010

Os ensaios de Inácio [23] consistiram na modelação numérica de 3 lajes diferentes, resultantes de ensaios efectuados por outros autores, assim como a variação de alguns parâmetros para verificação da sua influência nas cargas de rotura, no modo de rotura, nas deformações da laje e nas extensões nas armaduras em determinados pontos da laje.

Para cada modelo foi variada a energia de fractura, o uso do Rotated Crack Model ou do Fixed Crack Model, o uso de elementos finitos Shell fora da zona onde é prevista a rotura por punçamento e o uso de diferentes leis Bond-Slip entre as armaduras longitudinais e o betão.

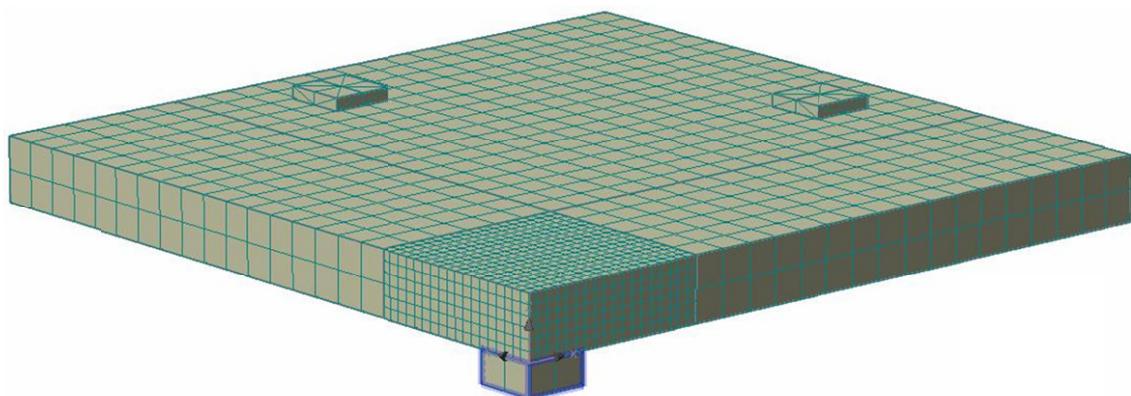


Figura 2-19 – Modelo com elementos “Brick”

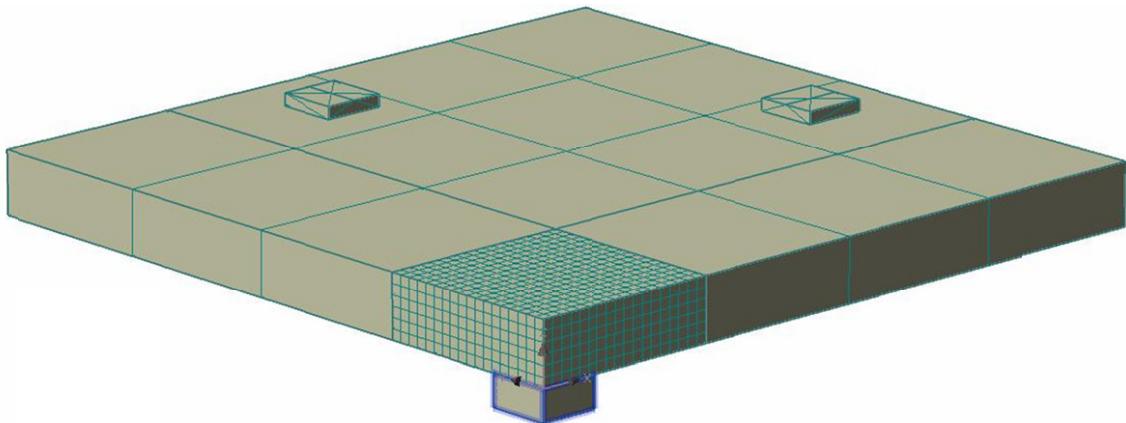


Figura 2-20 – Modelo com elementos “Brick” no interior e elementos “Shell” no exterior

Dos resultados obtidos, Inácio [23] concluiu que a previsão numérica ocorreu de acordo com os resultados experimentais, e que o método dos elementos finitos é capaz de prever o comportamento, a capacidade de carga, as deformações e o modo de rotura da laje.

Inácio [23] verificou também que a análise das extensões nas armaduras superiores é pouco fiável devido à grande variação da propagação de fendas na laje.

Dos factores variados para cada laje foi verificado que os que têm bastante influência são a energia de fractura e o uso de elementos Shell. A variação da energia de fractura levou a uma variação proporcional na carga de rotura da laje. O uso de elementos Shell reduziu o tempo da análise, mas proporcionou pior convergência para a solução experimental [23].

## 2.5 Normas e Recomendações

### 2.5.1 Eurocódigo 2

Esta secção contém as recomendações das Normas Europeias, recentemente adoptadas para Normas Portuguesas, em vigor para estruturas de betão armado, que contêm recomendações para casos de punçamento. Essa norma é a NP EN 1992-1-1 [10], também conhecido como Eurocódigo 2.

O Eurocódigo 2 tem a expressão de cálculo da tensão resistente a punçamento baseada no modelo da FIB Model Code 1990 [3], considerando que o perímetro de controlo ocorre a uma distância de duas vezes a altura útil da laje, ( $2^*d$ ) da face do pilar, de acordo com a Figura 2-21, onde  $d$  representa a média das alturas úteis nas duas direcções ortogonais.

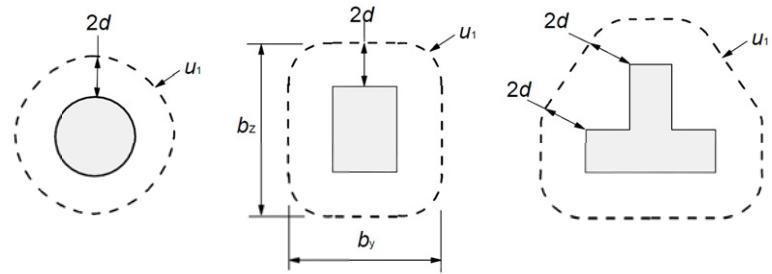


Figura 2-21 – Perímetro de contorno considerado pelo Eurocódigo 2 [10]

Para calcular o valor do punçamento sem armaduras específicas, o Eurocódigo 2 sugere a expressão (2.23).

$$v_{Rd,c} = C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + k_1 \sigma_{cp} \geq v_{min} + k_1 \sigma_{cp} \quad (2.23)$$

Onde:

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c}$$

$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0$  - Representa a calibração geométrica das lajes, de modo a ter em conta o efeito de escala.

$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$  - É a ponderação das percentagens de armadura presentes nas duas direcções, numa largura correspondente a  $3.d$  medida a partir das faces do pilar para cada lado.

$f_{ck}$  - É a tensão característica de resistência à compressão do betão.

$k_1 = 0,1$  - Valor recomendado pelo Eurocódigo 2 para a contribuição da compressão introduzida pelo pré-esforço para a resistência ao punçamento.

$$v_{min} = 0,035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} - \text{Valor mínimo da resistência ao punçamento.}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{cx} + \sigma_{cy}}{2} - \text{Represents the average compressive stress in the critical zone.}$$

Onde a primeira parte da expressão corresponde à resistência do betão e das armaduras principais, e a segunda parte da expressão tem em conta a presença de pré-esforço.

No caso da presença de armaduras específicas, o Eurocódigo 2 apresenta outra expressão para cálculo do punçamento resistente, a expressão (2.24).

$$v_{Rd,cs} = 0,75 \cdot v_{Rd,c} + 1,5 \cdot \left( \frac{d}{sr} \right) \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd,ef} \cdot \left( \frac{1}{u \cdot d} \right) \cdot \sin(\alpha) \quad (2.24)$$

$v_{Rd,c}$  – Resistência ao punçamento sem armaduras específicas.

$A_{sw}$  – Área transversal de armaduras específicas para punçamento em torno do pilar.

$f_{ywd,ef}$  – Tensão de cedência de cálculo das armaduras, onde  $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25 \cdot d \leq f_{ywd}$ , de modo a ter em conta o facto de que em lajes pouco espessas, a tensão de aderência não ser suficiente para mobilizar a resistência do aço.

$\alpha$  – Ângulo formado entre as armaduras específicas para resistência ao punçamento e o plano horizontal da laje.

### 2.5.2 Model Code 2010

O Model Code 2010 [19] veio trazer alterações ao já antigo Model Code 1990 [3], e assim introduzir recomendações actualizadas sobre o dimensionamento de estruturas de betão armado.

Em seguida serão apresentadas as recomendações presentes neste documento, no que se refere às análises numéricas.

#### 2.5.2.1 Recomendações para análises numéricas

No geral o modelo numérico deve ser executado por um critério de erro, pois é inevitável o aparecimento de erros oriundos de aproximações numéricas.

As análises por elementos finitos devem ser feitas recorrendo a algoritmos previsão-correcção onde a previsão é obtida por uma análise elástica linear, e posteriormente é corrigida utilizando as características não lineares dos materiais envolvidos, como ilustrado na Figura 2-22. As iterações terminam quando o erro gerado pela diferença entre a previsão e a correcção for aceitável.

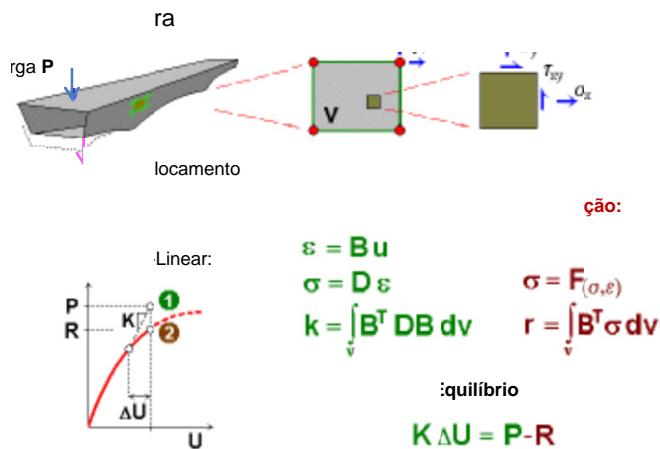


Figura 2-22 – Algoritmo previsão-correcção [19]

No geral, todas as modelações devem convergir para a solução exacta aquando a redução do tamanho dos elementos finitos utilizados, e o consequente aumento do número de graus de liberdade [19].

### 2.5.2.2 Modelação dos materiais

É recomendado que o modelo numérico dos materiais contenha todas as características e comportamentos do material que sejam relevantes para o problema em questão.

Dessas características destacam-se os modelos de amolecimento, de enrijecimento, modelos de comportamento tanto à compressão como à tracção e modelos de fissuração.

Todos estes modelos devem conter algoritmos que reduzam a sua sensibilidade à malha de elementos finitos escolhida, tanto à orientação dos elementos, como ao tamanho dos elementos.

Todas as características devem ser obtidas de ensaios aos materiais, de acordo com as normas em vigor, ou, à falta das mesmas, devem ser realizadas de acordo com as recomendações da RILEM.

### 2.5.2.3 Validação dos modelos

No geral, todas as análises feitas devem ser validadas através de análises semelhantes já efectuadas e com resultados comprovados, ajustando assim, tanto os modelos, como os modelos dos materiais de modo a obter os melhores resultados.

Para verificação dos modelos, deverá ser verificada a influência da malha de elementos finitos escolhida, criando um mínimo de três modelos com diferentes tamanhos de elementos finitos, comparando a sua influência no resultado final.

Caso os resultados obtidos para diferentes malhas sejam díspares, os resultados não deverão ser considerados.

#### 2.5.2.4 Verificação de segurança

Esta verificação é feita utilizando um dos seguintes métodos probabilísticos:

- Método dos factores parciais
- Método da resistência global

O método dos factores parciais consiste na aplicação de coeficientes de segurança às acções e às características dos materiais. Estes coeficientes têm em conta a variação dos valores médios dessas acções e características. Este método não é recomendado para análises numéricas pois apesar de ser possível aplicar às acções, não é possível aplicar às características dos materiais.

O método recomendado pelo Model Code 2010 [19] é o método da resistência global, que se baseia nas expressões (2.25) e (2.26).

$$F_d \leq R_d \quad (2.25)$$

$$R_d = \frac{R_m}{\gamma_R^* \gamma_{Rd}} \quad (2.26)$$

Onde a primeira expressão assegura que o valor da resistência de dimensionamento,  $R_d$ , é maior que o valor de dimensionamento das acções,  $F_d$ , e a segunda expressão aplica os factores de segurança resistência global e de incerteza do modelo,  $\gamma_R$  e  $\gamma_{Rd}$  respectivamente, minorando a resistência média,  $R_m$ , de modo a obter uma resistência de dimensionamento,  $R_d$ .



### 3 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO

#### 3.1 Elementos Finitos

##### 3.1.1 Formulação do problema pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

A análise da estrutura é feita recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais, PTV, igualando o trabalho virtual interno ao trabalho virtual externo.

O trabalho interno é calculado através do integral do produto das tensões pelas extensões, ao longo de todo o volume do elemento finito, como indicado na expressão (3.1).

$$\int_V \delta \varepsilon^t \cdot \sigma \, dV = R \quad (3.1)$$

Seguidamente são feitas algumas transformações, de forma a simplificar a formulação e facilitar a sua computação.

A primeira corresponde à separação das extensões pelo produto de um vector de derivadas por um vector de deslocamentos, como mostrado na expressão (3.2).

$$\delta \varepsilon = B \cdot \delta a \quad (3.2)$$

A segunda corresponde à introdução da relação tensões-deformação para materiais isotrópicos, correspondendo às expressões (3.3), (3.4) e (3.5).

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\sigma = D \cdot \varepsilon, \text{ com } D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\sigma = D \cdot B \cdot a \quad (3.5)$$

Seguidamente, após substituições utilizando as relações dadas pela função de forma como a da expressão (3.6), obtém-se a expressão para a rigidez do elemento, (3.7).

$$\delta u = N \cdot \delta a \quad (3.6)$$

$$\int_V B^t \cdot D \cdot B \, dV \cdot a = R \quad (3.7)$$

Como se pode observar, a expressão obtida é semelhante à expressão utilizada no método dos deslocamentos, a expressão (3.8).

$$K \cdot a = F \quad (3.8)$$

A formulação anteriormente mostrada é válida para todos os elementos finitos, porém, pelo facto de o software ATENA utilizar uma análise não linear, a formulação utilizada é ligeiramente diferente.

Uma das diferenças reside no facto de o software ATENA considerar as extensões como a soma de uma parte linear, e outra não linear, como na expressão (3.9). Utiliza também iterações para a convergência, representadas por (i) nas expressões seguintes.

$${}^t \varepsilon_{ij}^{(i)} = {}^t e_{ij}^{(i)} + {}^t \eta_{ij}^{(i)} \quad (3.9)$$

Após várias transformações, a expressão (3.10), é transformada na expressão (3.11)

$$\int_{tV} {}^{t+\Delta t} {}^t S_{ij}^{(i)} \delta \left( {}^{t+\Delta t} {}^t \varepsilon_{ij}^{(i)} \right)^t \, dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{tV} t C_{ijrs} {}_t e_{rs}^{(i)} \delta \left( {}_t e_{ij}^{(i)} \right)^t dV + \int_{tV} {}^{t+\Delta t} {}_t S_{ij}^{(i-1)} \delta \left( {}_t \eta_{ij}^{(i)} \right)^t dV \\
 & = {}^{t+\Delta t} R - \int_{tV} {}^{t+\Delta t} {}_t S_{ij}^{(i-1)} \delta \left( {}_t e_{ij}^{(i)} \right)^t dV
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Na expressão anterior, o primeiro integral representa o trabalho das tensões pela variação da parte linear das extensões ao longo do volume do elemento finito, o segundo integral representa o trabalho das tensões da iteração anterior pela variação da parte não linear das extensões, o terceiro integral representa o trabalho das tensões da iteração anterior pela parte linear das extensões.

Para o trabalho exterior, são consideradas cargas pontuais, distribuídas, e de superfície, assim como forças internas dos corpos e forças de inércia.

Na expressão (3.12) o primeiro integral refere-se ao trabalho efectuado por cargas exteriores, sejam cargas pontuais, distribuídas ou de superfície. O segundo integral incorpora o trabalho externo devido ao peso próprio. O terceiro integral tem em conta as forças de inércia, apenas utilizadas para análises dinâmicas.

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t} R = & \int_{tS} {}^{t+\Delta t} f s_i \cdot \delta \left( {}_t u^i \right) dS + \int_{tV} {}^{t+\Delta t} f b_i \cdot \delta \left( {}_t u^i \right) dV \\
 & + \int_{tV} {}^t \rho \cdot \frac{\partial^2 {}^{t+\Delta t} {}_t u_i^{(i-1)}}{\partial t^2} dV
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.1.2 Tipos de Elementos

Para as análises de zonas de descontinuidade em estruturas de betão armado podem ser utilizados elementos finitos de duas dimensões ou três dimensões. No caso do punçamento, as primeiras análises foram feitas com recurso a elementos finitos de duas dimensões, simulando armaduras radiais. Os resultados obtidos não eram adequados a casos com armaduras ortogonais, casos de punçamento excêntrico, e casos de punçamento em bordos de lajes [5].

Com a evolução dos modelos numéricos computacionais e com o poder de processamento dos computadores, passaram a utilizar-se análises tridimensionais verdadeiras, permitindo a aplicação de armaduras ortogonais. O facto de estas análises apresentarem um esforço

computacional muito maior, não permite a modelação de estruturas muito grandes. Para tal, é comum utilizar, para parte da estrutura, elementos de Shell, de modo a minimizar o esforço computacional [5].

O software de modulação numérica ATENA suporta vários tipos de elementos finitos tridimensionais, elementos hexaedros, de seis faces, elementos tetraedros, de quatro faces, e elementos *wedge*, de cinco faces [12]. Tais elementos encontram-se nas Figura 3-1, Figura 3-2 e Figura 3-3.

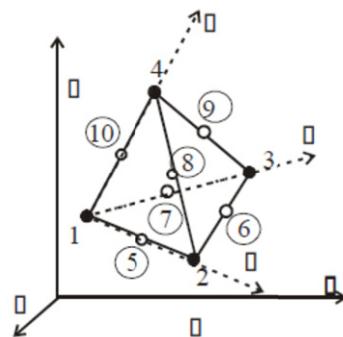


Figura 3-1 – Geometria dos elementos Tetraedros [12]

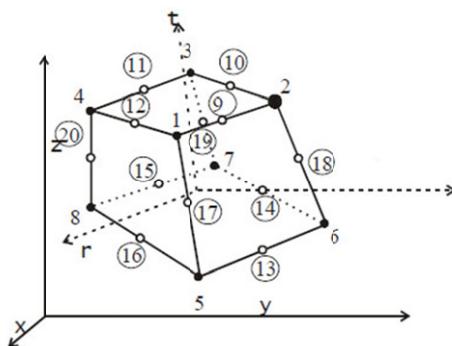


Figura 3-2 – Geometria dos elementos Hexaedros [12]

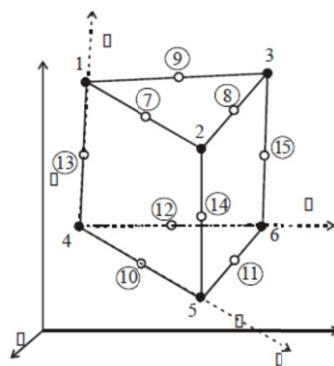


Figura 3-3 – Geometria dos elementos *Wedge* [12]

O número de pontos de cada tipo de elemento varia com o tipo de funções de interpolação escolhidas. A numeração dos nós com círculos, localizada nos vértices, indica os pontos utilizados para funções de interpolação lineares. Para funções de interpolação quadráticas, são utilizados os restantes pontos.

Quadro 3-1- Tipos de elementos 3D

Elemento	Função Interpoladora	Nós	Pontos de Integração
Tetraedro	Linear	4	4
	Quadrática	10	10
Hexaedro ( <i>Brick</i> )	Linear	8	8
	Quadrática	20	20
Wedge	Linear	6	6
	Quadrática	15	15

A escolha do tipo de funções interpoladoras depende dos resultados que se pretende obter, sendo que o uso de uma função de maior ordem, permite a obtenção de resultados mais precisos, à custa de maior tempo de computação.

Para manter a escolha das funções independente da malha de elementos finitos gerada, foram organizadas de forma hierárquica as funções de forma, sendo que as primeiras funções interpoladoras correspondem a funções lineares, correspondentes aos pontos exteriores, e só depois surgem funções quadráticas (quando escolhidas). Isto assegura que não é necessário alterar a malha, sendo apenas necessário acrescentar ou remover pontos e funções. Permite também a existência de elementos com qualquer número de pontos entre os necessários para funções lineares e os necessários para funções quadráticas (entre 8 e 20 para um *Brick*) [12].

### 3.1.3 Integração de Gauss

A integração dos elementos é feita com recurso à quadratura de Gauss.

Esta técnica tem por base uma forma de integração aberta, em que o intervalo de integração se estende para além das coordenadas usadas para integração, extrapolando os resultados

para os limites de integração pretendidos. Isto permite, se os pontos forem bem escolhidos, anular parcial ou totalmente os erros cometidos ao escolher os pontos do limite do integral [31]. Este método é dos mais eficientes para integração numérica, estando ao nível da Integração de Romberg e da Quadratura Adaptativa.

Para tal, é necessário utilizar um intervalo de integração entre -1 e 1, através de uma mudança de variável e para o qual já estão estudados os pontos e pesos para cada grau de função a integrar.

A mudança de variáveis genéricas para a obtenção do intervalo desejado, ver Figura 3-4, pode ser feita através da introdução de uma matriz de transformação, a matriz Jacobiano.

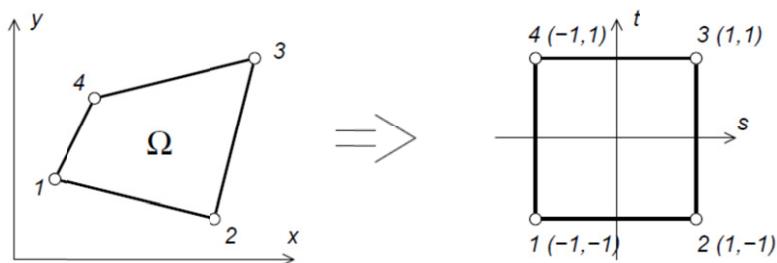


Figura 3-4 – Transformação de coordenadas [13]

O Jacobiano é composto por uma matriz formada por derivadas parciais das coordenadas originais em relação às coordenadas após transformação, como na expressão (3.13).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \dots & \frac{dy_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dy_m}{dx_1} & \dots & \frac{dy_m}{dx_n} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para o caso de uma dimensão, rapidamente se obtêm as expressões (3.14) e (3.15).

A expressão (3.14) é obtida pela soma das funções de forma, e a expressão (3.15) é obtida do determinante do Jacobiano.

$$x = \frac{(b+a) + (b-a)x_t}{2} \quad (3.14)$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dx_t \quad (3.15)$$

Obtendo-se assim

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b+a)+(b-a)x}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dx_t \quad (3.16)$$

Aplicando os pontos e pesos respectivos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{(b-a)}{2}x_i + \frac{(a+b)}{2}\right) \quad (3.17)$$

De forma semelhante, é possível obter para o caso de duas dimensões.

Uma das razões para o uso da quadratura de Gauss é a sua precisão. Para uma quadratura com  $n$  pontos, permite a obtenção exacta do integral para polinómios de ordem de até  $2n-1$ , onde  $n$  representa o número de pontos de integração [31].

Os pontos de integração e os respectivos pesos provêm de deduções feitas, admitindo que o integral se ajusta a determinadas funções, constantes, lineares, quadráticas, e resolvendo um sistema de equações [31]. O número de equações é igual à soma do número de pontos e número de pesos. Estes pontos e pesos já estão estudados, sendo utilizados para quaisquer dimensões do elemento [31].

Tabelas contendo os pontos de integração e os pesos para as diferentes funções de interpolação, assim como para os diversos elementos suportados pelo ATENA 3D podem encontrar-se no manual de Teoria do software [12].

### 3.2 Modos de fractura

Na modelação numérica de estruturas de betão armado em análises não lineares, para a modelação do comportamento de criação e propagação de fendas, é necessário que essa modelação seja capaz de prever os diversos modos de fractura e de propagação existentes, de modo a se poder fazer uma análise mais realista.

Existem três modos de propagação de fendas através da aplicação de forças.

Modo I – Modo de abertura, através de tensões normais ao plano da fenda.

Modo II – Modo de deslizamento, através de tensões de corte no plano da fenda.

Modo III – Modo de rasgamento, através de tensões de corte no plano da fenda perpendiculares às do Modo II.

Estes modos estão ilustrados na Figura 3-5.

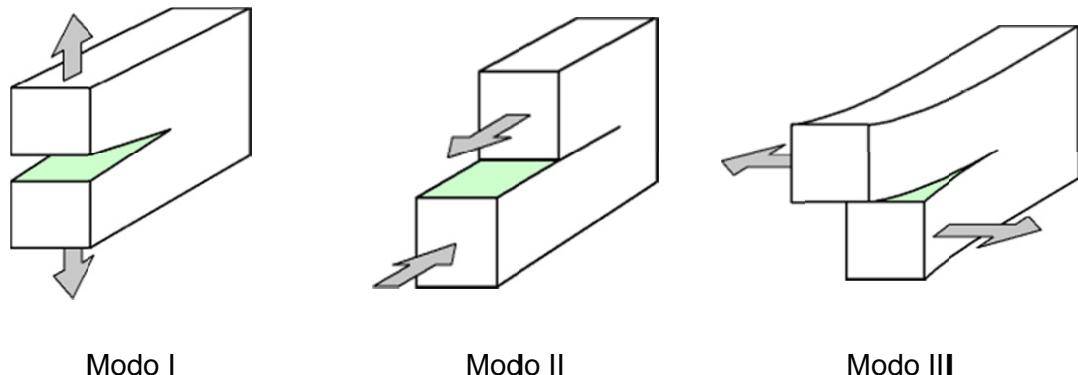


Figura 3-5 – Modos de propagação de fendas

### 3.3 Fissuração

Nesta secção serão apresentados alguns conceitos relativos à modelação numérica e diferentes modelos de fissuração utilizados em grande parte da modelação numérica não linear de estruturas de betão armado.

### 3.3.1 Fictitious Crack Model

O *Fictitious Crack Model* é um modelo desenvolvido por Hillerborg [22], que simula as fendas através do amolecimento de tensões na zona de fractura através de uma fenda fictícia, antes da existência de uma fenda real [5]. Este modelo tem por base o conceito de energia de fractura, energia necessária para criar uma fenda de área unitária, correspondendo à área sob o diagrama tensão-deformação do betão sob tracção [12]. O modelo assume que após ser atingida a resistência de tracção do betão, a fenda começa a ser criada com o amolecimento do betão, criando a microfendilhação. Ao proceder o carregamento, a energia absorvida por essa fenda fictícia aumenta, até se atingir a energia de fractura pré-definida e a fenda não permitir mais a transmissão de tensões [22].

### 3.3.2 *Crack Band Theory*

Esta teoria, está associada a superfícies de rotura do material, e tem como objectivo limitar geometricamente as deformações impostas pela fendilhação e permite minimizar o efeito de diferentes tamanhos e diferentes orientações dos elementos finitos.

Embora a *Crack Band Theory* se refira a rotura por tracção, o mesmo acontece quando o material se encontra sob compressão, aparecendo sob a forma de fendas, quando o material está traccionado, e sob a forma de superfícies de esmagamento, quando o material está comprimido. Como as dimensões destas superfícies são independentes da geometria e dimensões estruturais, assumem-se como superfícies fictícias [12].

O efeito da dimensão do elemento é corrigido considerando que as bandas de rotura,  $L_t$  e  $L_c$ , são definidas como projecções das dimensões do elemento finito, segundo os eixos das tensões principais, como ilustrado na Figura 3-6.

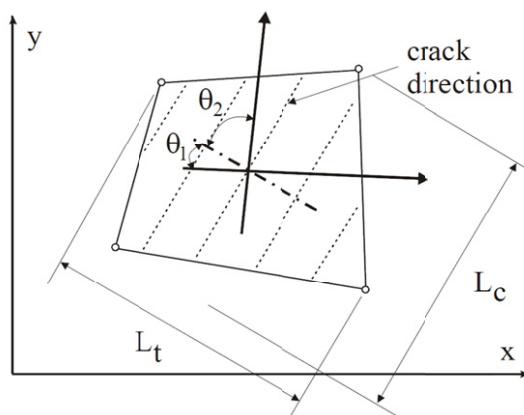


Figura 3-6 – Bandas de rotura, projecção das dimensões do elemento [12]

O efeito da orientação é utilizado para malhas com elementos pouco regulares, aumentando as bandas de rotura de acordo com uma expressão predefinida, que tem em conta o ângulo formado entre as tensões principais e as arestas do elemento.

### 3.3.3 Modelos de Fissuração

A simulação numérica da fissuração no betão começou na década de 60, com a contribuição de Ngo e Scordelis [36], que propuseram um modelo de fissuração discreta, e com a contribuição de Rashid [41], que propôs um modelo de fissuração distribuída. O primeiro modelo, através da discretização das fendas, foi criado para acompanhar o início e desenvolvimento de fendas dominantes. O segundo tem como objectivo simular o betão como algo heterogéneo, com armaduras embebidas, criando um padrão de microfissuração, que ao longo do carregamento tendem a convergir para uma fenda dominante [16].

A utilização de cada um dos modelos traz os seus benefícios, sendo o desejável uma aproximação destes dois modelos. Para tal, foi criado o *Cohesive Segments Method*, que permite características de ambos os modelos anteriores [16].

### 3.3.4 Fissuração Discreta

A fissuração discreta inicia a fendilhação assim que as forças nodais normais às fronteiras do elemento atingem a tensão máxima admitida pelo material, iniciando assim, uma fenda. A evolução das fendas é feita pelo mesmo critério. A propagação depende das características do modelo, sendo que há modelos que permitem a reformulação da malha, e outros não. A não reformulação da malha leva a que as fendas tenham de se iniciar e propagar nas fronteiras dos elementos finitos, sem a criação de novos elementos, o que leva a uma fácil computação, mas resultados menos fiáveis. Por outro lado, a reformulação da malha, permite a obtenção de melhores resultados, mas à custa de tempo computacional [16]. Uma ilustração desta propagação encontra-se na Figura 3-7.

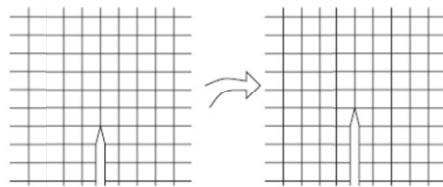


Figura 3-7 – Propagação da fenda sem reformulação de malha [16]

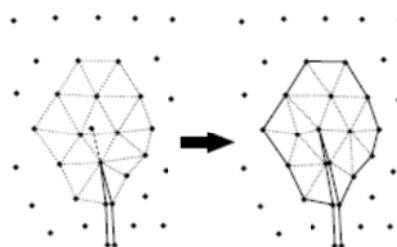


Figura 3-8 – Propagação da fenda com reformulação de malha [35]

### 3.3.5 Fissuração Distribuída

A fissuração distribuída simula fendas distribuídas numa zona, simulando a micro-fendilhação do betão, considerando o elemento finito sólido, como algo contínuo. Ao considerar os elementos como contínuos, pode-se manter as relações tensão-deformação, e, aquando da fissuração, essas relações, inicialmente isotrópicas, com propriedades físicas

iguais em todas as direcções, alteram-se para relações ortotrópicas, onde as propriedades do material dependem da sua orientação.

Esta alteração das relações constitutivas dos elementos ocorre apenas nas imediações da fenda. As vantagens desta aproximação, sobre a Fissuração discreta, são a facilidade computacional, e a semelhança com a realidade, pelo facto de as microfendas não serem discretas e rectas, mas serem distribuídas e curvas.

Esta implementação permite manter a malha inicial de elementos finitos, sendo perfeitamente adequado à computação [47].

Deste tipo de fissuração, existem vários modelos que têm vindo a ser desenvolvidos ao longo de mais de 40 anos.

### 3.3.5.1 Fixed Crack Model, Rashid 1968 [41]

Este modelo inicia-se através do Modo I de fractura, quando se atinge a resistência última biaxial de tracção,  $f_t^{ref}$ , e a fissuração é orientada pela direcção das extensões principais no início da fendilhação. Estas coincidem com as extensões principais, pois antes da fendilhação o material ainda se comporta como isotrópico. Ao se proceder com o carregamento, a direcção da fenda é mantida, representando o eixo de ortotropia do material [12].

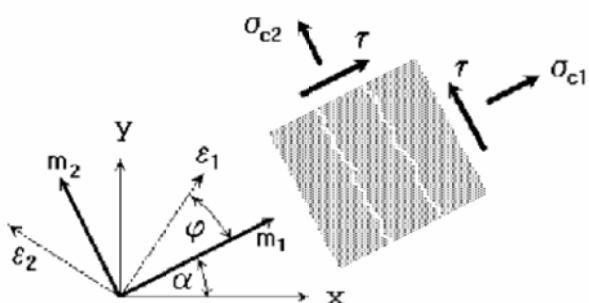


Figura 3-9 - Estados de extensões e tensões após fissuração no *Fixed Crack Model* [12]

Um dos grandes defeitos do modelo original é o facto de não serem permitidas mais fendas nas imediações da fenda inicial, isso pode levar a que, após a criação da primeira fenda, as suas imediações poderão ter uma resistência superior à capacidade do material [37], levando à sobreestimação da carga de rotura. Mesmo após a introdução de várias estratégias para o evitar, como a criação de uma relação entre as tensões de corte nas imediações da

fenda e a abertura da fenda, o modelo continua a obter resultados de cargas superiores às cargas experimentais [46].

### 3.3.5.2 *Rotated Crack Model, Cope et al 1980 [14]*

Tal como o modelo anterior, também este é iniciado pelo critério de rotura biaxial, mas, enquanto que o FCM mantém constante a direcção das extensões principais do início da fendilhação para toda a fenda, o RCM segue, ao longo da fendilhação, a direcção principal das extensões, variando assim a sua orientação. A rotura começa assim, pelo Modo I de fractura, mantendo-o ao longo da fendilhação. Ao adoptar as direcções principais das extensões, faz com que não existam forças de corte ao longo da fenda, apenas duas forças principais [12]. Pelo facto de a fenda seguir as direcções principais das extensões, este modelo não apresenta tracções exageradas nas imediações da fenda [46].

Deste modelo resulta um comportamento da fenda mais dúctil, pois a rotura ocorre sempre segundo a direcção principal do carregamento, fazendo com que a dissipação de energia seja maximizada [46].

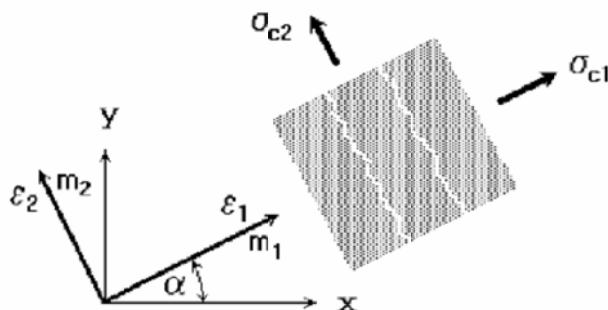


Figura 3-10 - Estados de extensões e tensões após fissuração no *Rotated Crack Model* [12]

### 3.3.5.3 *Multiple Fixed Crack Model, Borst e Nauta 1985 [15]*

Este modelo foi criado com a intenção de obter comportamentos entre o FCM, corrigindo os excessos de rigidez, e o RCM, corrigindo o comportamento excessivamente dúctil.

O modelo, tal como os anteriores, tem início baseado no critério de rotura biaxial, e a direcção inicial da fenda segue as direcções principais das extensões. Na continuação do desenvolvimento da fenda, tal como no FCM, ela mantém a direcção original. O plano da fenda mantém-se constante até as extensões principais e a fenda inicial atingirem um ângulo predefinido,  $\Delta_x^{thr}$ , a partir do qual se inicia novamente o critério de rotura biaxial, iniciando, quando violado, as fendas secundárias [37].

Esta formulação permite assim obter resultados entre o FCM, onde  $\Delta_x^{thr} = 90^\circ$ , sendo que a fendilhação ocorre apenas na direcção principal original, e o RCM  $\Delta_x^{thr} = 0^\circ$ , onde a fenda está constantemente a adoptar a nova direcção principal [46].

Esse ângulo predefinido é um parâmetro escolhido pelo utilizador, sendo que não há nenhum valor adoptado que seja geral para qualquer tipo de estrutura de betão armado. Isto leva a que os resultados obtidos dependem da escolha deste ângulo.

### 3.3.5.4 Microplane Model, Carol e Prat 1990 [9]

O modelo do microplano, é um modelo numérico da interpretação de modelos mais antigos do comportamento de metais policristalinos, sendo que Carol e Prat [9] adaptaram ao comportamento de materiais não homogéneos como o caso do betão.

O modelo consiste na análise de tensões num dado número de planos, predefinidos, quanto ao critério de rotura. Esta rotura, ao contrário dos modelos *FCM* e *RCM*, pode não ocorrer nos planos das tensões principais, mas em qualquer um dos planos adoptados. A análise tem então de ser feita não apenas a tensões normais, mas também a tensões de corte [46]. Isto permite fracturas não só do Modo I, mas também dos Modos II e III.

Assim sendo, os resultados dependem do número de microplanos adoptado, pelo que a precisão é obtida à custa de eficiência numérica, ou a eficiência à custa de precisão [37].

A Figura 3-11 ilustra a microestrutura do material, assim como a sua representação através de microplanos.

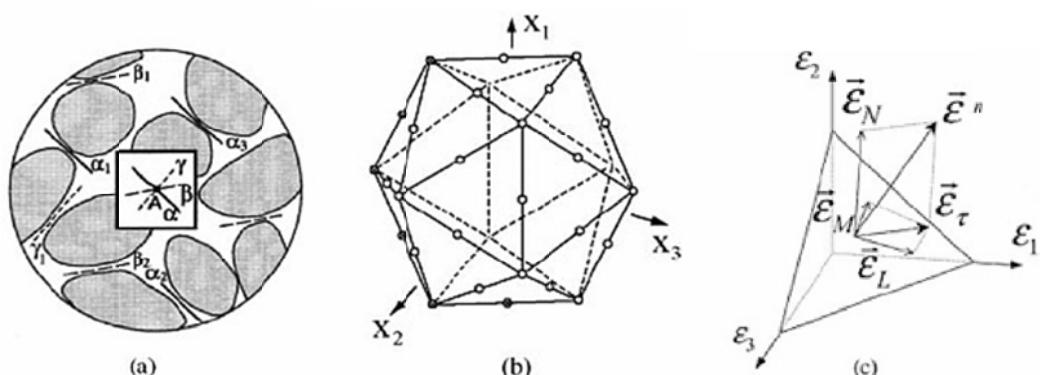


Figura 3-11 – a) Microestrutura do material granular, b) Elemento representativo dos microplanos c) Projecções das extensões de um microplano [1]

### 3.3.5.5 Adaptive fixed crack model, Ohmenhause et al [37]

Este modelo tentou tornar mais eficiente o critério de início de fendilhação, tornando-o válido para qualquer orientação.

Foi então criado um critério generalizado, dependente das tensões locais, onde  $F=0$  representa o estado limite das tensões num ponto antes de se iniciar a alteração das características do material [37].

$$F = -(q_n - q_{n,f} - a)^2 + \frac{q_t^2}{\tan^2 \Phi} + a^2 = 0 \quad (3.18)$$

$q_n, q_t$  – Tensões instaladas no material, normais e tangenciais, respectivamente

$q_{n,f}$  – Resistência à tracção do material

Desta expressão obtém-se o critério de fendilhação mostrado na Figura 3-12:

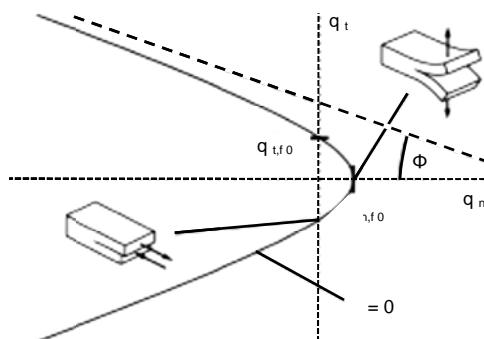


Figura 3-12 – Ilustração gráfica do critério de falha do *Adaptive Fixed Crack Model* [37]

Tal como se pode observar pela figura, o modelo permite captar fracturas de diversos modos e de modos mistos.

A propagação da fenda é feita através de um critério de energia, sendo necessária a introdução da energia de fractura para os Modos de Fractura I e II, sendo que estes são suficientes para permitir a extrapolação para Modos mistos [37].

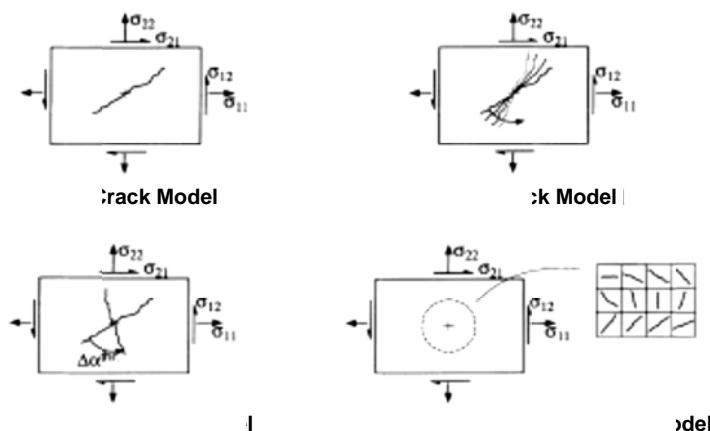


Figura 3-13 – Ilustração de alguns modelos de fissuração [37]

### 3.3.5.6 Segmentos Coesivos, Borst et al [16]

Como forma de corrigir algumas dependências da malha dos modelos de fissuração distribuída, este modelo foi criado, sendo um processo que considera a interacção entre o elemento considerado e os elementos fronteiriços, assim como a continuidade da fenda ao longo dos elementos.

Após se verificar a rotura através de um determinado critério, é criada no ponto de integração uma superfície coesiva com direcção coincidente com as direcções principais das extensões [16]. Ao aparecer a fenda, as relações constitutivas são alteradas, modificando o comportamento do material localmente, assemelhando assim o processo de fendilhação.

Aos nós do elemento onde é criada a fenda são permitidos deslocamentos adicionais, de modo a ter em conta o processo de fendilhação, aos nós dos elementos fronteiriços não, de modo a garantir uma abertura de fenda nula na ponta da fenda.

Essa superfície tende depois a expandir-se desse ponto para os elementos na fronteira, assim que nesse elemento for atingido o critério de rotura. Essa propagação é feita através da propagação do segmento já existente, seguindo a direcção predefinida no elemento inicial, podendo adquirir uma nova direcção ao passar a fronteira com outro elemento [16].

Na Figura 3-14 encontra-se uma ilustração do aparecimento do segmento após ser atingido o critério de rotura e a posterior propagação para elementos fronteiriços. Os nós a cheio representam nós com graus de liberdade adicionais, e os nós cinzentos representam nós influenciados pelo segmento ao propagar-se.

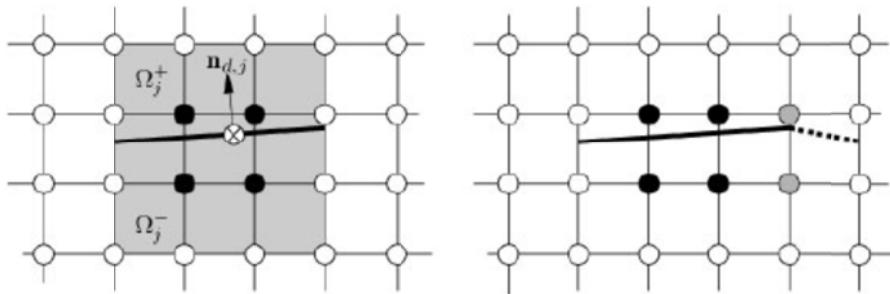


Figura 3-14 – Esquerda - Início do segmento coesivo; Direita – Propagação do segmento [16]

Podem ocorrer casos onde existe encontro de segmentos vários, levando à junção de segmentos, criando pontas livres, ou simples junção de dois segmentos. A Figura 3-5 contém uma ilustração destas intersecções e encontros. Nestes casos, os nós do elemento onde ocorre a intersecção são processados várias vezes, uma para cada segmento que chega ao encontro.

No primeiro caso, a propagação de um segmento encontra o interior de outro segmento criando uma ponta livre, impedindo posterior propagação do segmento. No segundo caso, duas pontas de dois segmentos encontram-se, simplesmente unindo-se.

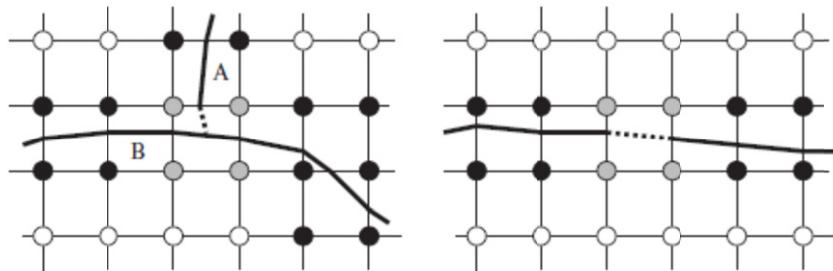


Figura 3-15 – Esquerda – Intersecção de segmentos formando uma ponta livre; Direita – União de segmentos [16]

Estas características fazem com que este modelo seja eficiente a simular a fissuração distribuída em sólidos heterogéneos, permitindo simular fissuração distribuída, a sua propagação e junção, assim como o início e propagação de apenas uma fenda dominante.

### 3.4 Introdução ao software ATENA

O software SBETA ATENA 3D é destinado a efectuar análises tridimensionais não lineares em estruturas de betão armado. O software foi criado pela empresa Checa, Cervenka

Consulting, Ltd, sendo uma evolução do software original SBETA, estando actualmente na versão 4.

Das características do software, destacam-se algumas, que permitem a modelação de estruturas de Betão Armado:

- Descrição do comportamento não linear do betão, incluindo o endurecimento e posterior amolecimento do betão sob compressão, e fractura sob tensão, seguindo algumas regras de fissuração.
- Critérios de rotura biaxial.
- Diferenciação entre estados não fendilhado e fendilhado. Após fendilhação, há uma redução da resistência à compressão, redução da resistência à tracção, e redução também da rigidez de corte.

## 3.5 Modelos de Constitutivos do Betão

### 3.5.1 Relações Tensão-Deformação

As relações consideradas para o comportamento do material num estado biaxial, foram reduzidas a um estado uniaxial, de forma a eliminar o efeito de Poisson, introduzindo uma extensão equivalente uniaxial. Os detalhes sobre a rotura biaxial encontram-se no ponto 3.5.5.

Para a relação tensão-deformação é utilizado um diagrama assimétrico, de acordo com a Figura 3-16, baseado no comportamento real do material.

Os diagramas de tensão-deformação estão de acordo com as recomendações da CEB-FIP Model Code 90, mas apenas para o ramo ascendente, sendo apropriados tanto para betões normais, como para betões de alta resistência [12].

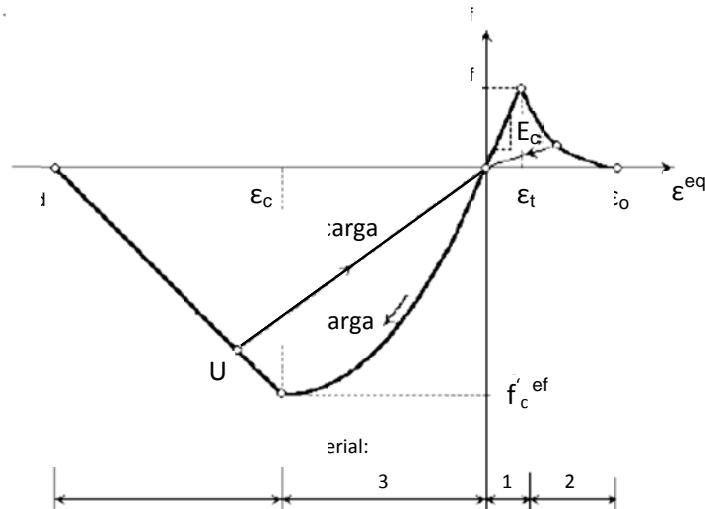


Figura 3-16 - Diagrama Tensão-Deformação [12]

O estado do material (Betão) é determinado de acordo com a numeração no diagrama. Os estados 1 e 3 representam os estados iniciais do material, antes da existência de fendilhamento, em tracção e compressão, respectivamente. Os estados 2 e 4 representam estados fendilhados do material, sendo o estado 2 caracterizado por fendas perpendiculares ao carregamento de tracção, e o estado 4 caracterizado pela existência de fendas paralelas ao carregamento.

Tal como a Figura 3-16 mostra, as fases de descarga, quer sob tracção, quer sob compressão, são feitas através de um troço linear até à origem do gráfico.

A descrição das funções utilizadas para o comportamento sob tracção encontram-se em 3.5.2. Para o comportamento sob compressão, as funções encontram-se em 3.5.3.

Os valores máximos  $f_c^{ef}$  e  $f_t^{ef}$  são determinados de acordo com o critério de rotura Biaxial no ponto 3.5.5.

### 3.5.2 Comportamento sob Tracção

Antes da fendilhamento, o material apresenta um comportamento Elástico-Linear, apresentando um Módulo de Elasticidade semelhante ao da fase de compressão, definido pelo utilizador.

Este comportamento verifica-se até se atingir o valor de  $f_t^{ef}$ , a partir do qual começa a fendilhamento. Este comportamento pode ser descrito pela expressão (3.19).

$$\sigma_c^{ef} = E_c \cdot \varepsilon^{eq} \quad \text{para } 0 \leq \sigma_c^{ef} \leq f_t^{ef} \quad (3.19)$$

A partir deste ponto, a fendilhação é simulada através de formulações de abertura de fendas, a de *fictitious crack model*, baseada numa lei de abertura de fendas exponencial.

### 3.5.2.1 Lei de abertura de Fendas

A função da abertura de fendas é baseada na energia de fractura e na resistência efectiva à tracção do betão.

Esta função está ilustrada na Figura 3-17. Nas ordenadas está representada a tensão resistente à tracção e nas abcissas a aertura de fendas.

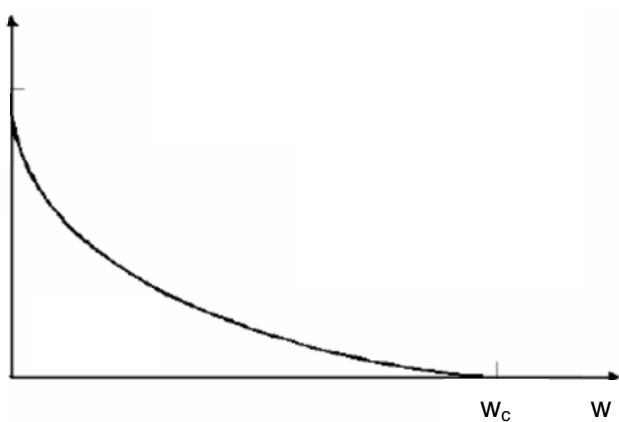


Figura 3-17 – Lei de abertura de fendas exponencial [12]

Que pode ser obtida por:

$$\frac{\sigma}{f_t^{ef}} = \left\{ 1 + \left( c_1 \frac{w}{w_c} \right) \right\} \cdot \exp \left( -c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \cdot \exp(-c_2) \quad (3.20)$$

e

$$w_c = 5,14 \frac{G_f}{f_t^{ef}} \quad (3.21)$$

A expressão tem em conta a energia de fractura,  $G_f$ , abertura de fendas,  $w$ , assim como a tensão efectiva de resistência à tracção. Os parâmetros designados por  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de calibração. O facto de se utilizar comportamentos baseados na abertura de

fendas está relacionado com a sua reduzida dependência da malha de elementos finitos criada.

### 3.5.3 Comportamento sob Compressão

O comportamento do material sob compressão segue o diagrama tensão-deformação mostrado anteriormente.

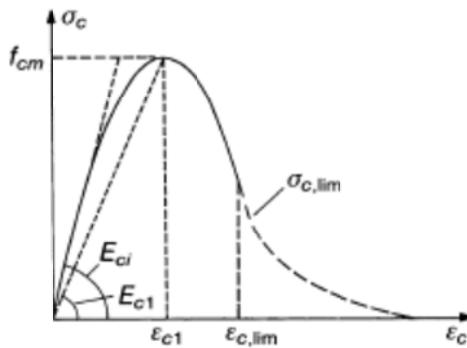


Figura 3-18 - Relações Tensão-Deformação propostas pelo Model Code 1990 [3]

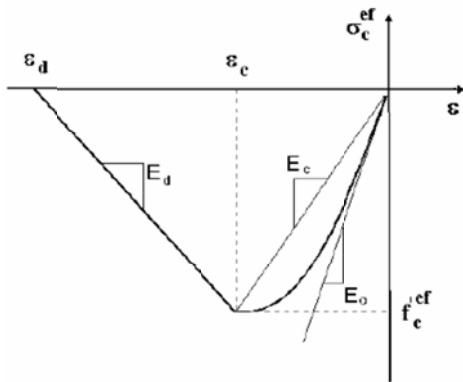


Figura 3-19 - Relações adoptadas pelo software SBETA ATENA [12]

A diferente notação levou a que os eixos sejam diferentes, sendo que no Model Code 1990 a compressão é considerada como positiva, e pelo contrário, no software, as compressões são consideradas como negativas. O mesmo acontece com as extensões.

Nas figuras estão representadas diversas grandezas características de um betão. A resistência média à compressão,  $f_{cm}$ , módulos de elasticidade tangencial e secante,  $E_{ci}$  e  $E_{c1}$  respectivamente, e também as extensões correspondentes à tensão máxima resistente e extensão de rotura,  $\epsilon_{c1}$  e  $\epsilon_{c,lim}$  respectivamente.

De notar que a resistência de pico adoptada pelo software é  $f_c^{ef}$ , pois estes diagramas referem-se a roturas biaxiais, ao contrário de  $f_{cm}$ , que se refere a rotura uniaxial.

O ramo ascendente é definido pela função recomendada pelo Model Code 1990 [3].

$$\sigma_c = -\frac{\frac{E_{ci} \varepsilon_c - \varepsilon_c^2}{E_{c1} \varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c1}^2}}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad , \text{válido para } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}| \quad (3.22)$$

Como se pode observar, a expressão tem em contas os Módulos de Elasticidade Secante,  $E_{c1}$ , e Tangente,  $E_c$ , assim como a extensão para qual é atingida a resistência máxima do betão,  $\varepsilon_{c1}$ .

Adaptando à rotura biaxial, implica a utilização do valor  $f_c^{ef}$  que tem em conta as tensões na direcção ortogonal. A expressão pondera também o estado das extensões em relação à extensão máxima através da variável  $x$  e a relação entre os módulos de elasticidade através da variável  $k$ .

$$\sigma_c^{ef} = \frac{kx - x^2}{1 + (k-2)x} f_c^{ef} \quad , \text{com } x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad \text{e} \quad k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad (3.23)$$

Após se atingir a resistência de pico,  $f_c^{ef}$ , foi adoptado um ramo linear descendente, como demonstrado na Figura 3-19. Este ramo foi adaptado de um diagrama de amolecimento linear em função da abertura de fendas, e posteriormente é adaptado para extensões, de acordo com o tamanho dos elementos finitos utilizados,  $L_t$ . São adaptados conforme a expressão em (3.24) que tem em conta um valor pré-definido para a abertura de fenda crítica  $w_d$  de 0,0005m, valor para o qual a resistência passa a ser nula.

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L_t} \quad (3.24)$$

### 3.5.4 Processo de fractura

O processo de fractura realiza-se de acordo com o estado do material.

Existem três estados possíveis:

- Não fendilhado
- Zona de início de fendilhação
- Fendilhado

O desenvolvimento da fenda começa pelo estado não fendilhado, que ocorre antes de se atingir a resistência à tracção do betão, após a qual se inicia a fendilhação, sendo que a resistência à tracção vai diminuindo, com o aumento da abertura de fenda. Nesta fase de processo de fractura, ainda é possível o fecho das fendas. Quando a resistência à tracção atinge valores nulos, a fenda já está completamente aberta, não sendo possível o fecho da mesma.

A abertura de fendas pode ser obtida por:

$$w = \varepsilon_{cr} \cdot L_t \quad (3.25)$$

$\varepsilon_{cr}$  – Extensão de abertura de fenda

$L_t$  – Banda de rotura, ver 3.3.2

Esta evolução encontra-se ilustrada na Figura 3-20

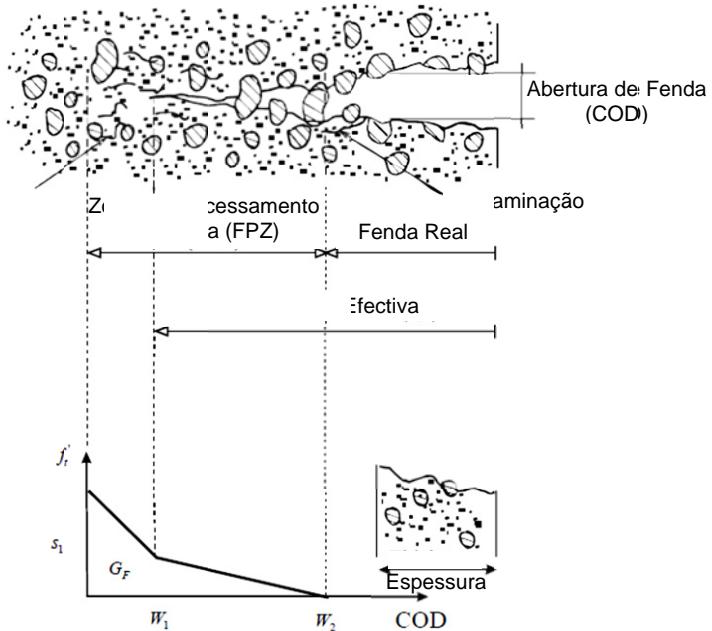


Figura 3-20 - Fases da abertura de fendas [29]

### 3.5.5 Rotura Biaxial

Para a rotura por compressão biaxial, foi considerado um modelo que considera os benefícios da compressão biaxial, levando a um aumento ligeiro da resistência, ao contrário do efeito de Poisson. A aplicação da equação (3.26) resultando no diagrama da Figura 3-21.

$$f_c^{ef} = \frac{1+3,65a}{(1+a)^2} f'c \text{ , com } a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (3.26)$$

Onde  $\sigma_{c1}$  e  $\sigma_{c2}$  representam as tensões principais e  $f'c$  representa a resistência uniaxial do betão, testado em cilindros.

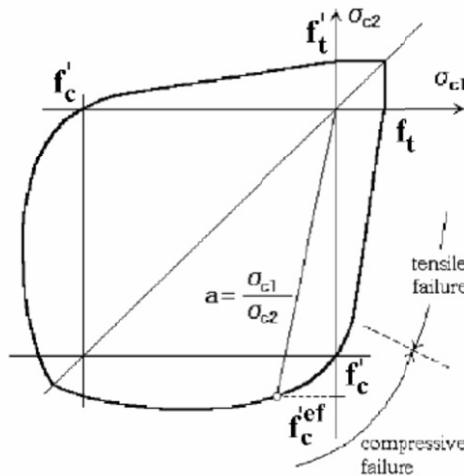


Figura 3-21 - Critério de rotura Biaxial [12]

O diagrama prevê o efeito de Poisson, permitindo o aumento de resistência para compressões biaxiais, assim como a redução de resistência para compressão num eixo, e tração noutro. Esta redução é dada por um factor de redução, normalmente compreendido entre 0 e 1. Este ramo é definido por:

$$f_c'^{ef} = f'_c \cdot r_{ec} \text{ , com } r_{ec} = (1 + 5,3278 \frac{\sigma_{c1}}{f'_c}) \quad (3.27)$$

Onde  $r_{ec}$  é o factor de redução da resistência à compressão numa direcção, na presença de tração na direcção perpendicular.

### 3.5.6 Fendilhação

O software SBETA ATENA, apenas lida com a fendilhação distribuída, e com a limitação dos danos baseada no modelo *Crack Band Theory*.

Este modelo de fendilhação distribuída, *Smeared Crack Model*, consegue descrever a propagação de fendas tanto em estruturas de betão, como em estruturas de betão armado [12].

A fendilhação distribuída suportada baseia-se no *Fixed Crack Model*, no *Rotated Crack Model* e no *Microplane Model*.

Estes modelos podem ser seleccionados na escolha do material, sendo que os dois primeiros pertencem ao material CC3DNonLinCementitious2, e o último pertence ao material CCMicroplane4.

No material CC3DNonLinCementitious2, a escolha entre o *Fixed Crack Model* e o *Rotated Crack Model* é feita através de um coeficiente que determina o valor relativo à resistência à tracção do betão, a partir do qual se inicia o *Fixed Crack Model*, como mostrado na Figura 3-22 [12].

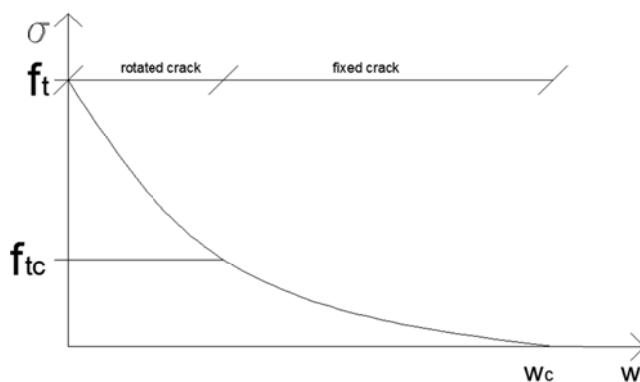


Figura 3-22 – Modelo de amolecimento relacionado com o tipo de fractura

No material CCMicroplane4, existe a possibilidade de escolha do número de planos de entre 21, 28, 37 e 61, assim como alguns parâmetros para definir as características do microplano. Devido à sua complexidade, este tipo de análise implica elevado esforço computacional.

### 3.5.7 Comportamento após Fendilhação

#### 3.5.7.1 Comportamento do material sob tensões de corte

Ao apresentar fendilhação, há uma diminuição da rigidez de corte do material, isso é feito diminuindo o módulo de distorção original do material. Esta diminuição é proporcional às extensões normais à fenda.

#### 3.5.7.2 Comportamento do material sob tensões de compressão

Há também uma redução de resistência após fendilhação, na direcção paralela à fenda.

Essa redução é feita através de uma função pré-definida,  $r_c$ , em que para extensões nulas, a redução é zero, e para extensões muito grandes, a tensão resistente tende para:

$$f_c^{ef} = c \cdot f_c \quad (3.28)$$

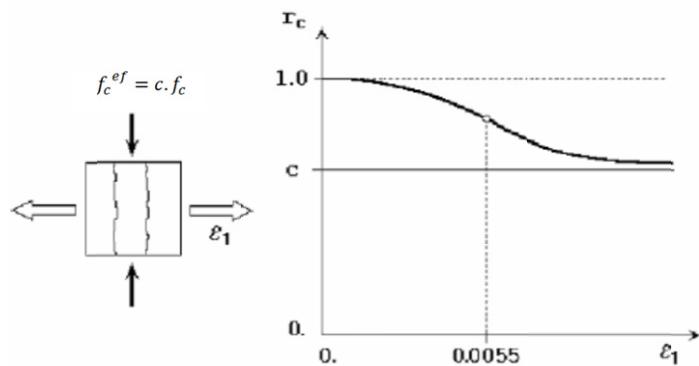


Figura 3-23 – Redução de compressão após fendilhação [12]

O valor de  $c$  foi determinado de acordo com experiências, sendo que se obtiveram valores de 0,45 a 0,8. O valor pré-definido é de 0,8 e pode ser alterado nas definições do material betão.

## 3.6 Modelos Constitutivos para Armaduras de Aço

### 3.6.1 Armadura Distribuída

Este tipo de armadura age como um material composto, podendo ser considerada como um único material, através de uma camada com constituição diferente, ou como um dos constituintes do material.

### 3.6.2 Armadura Discreta

Esta armadura é desenhada isoladamente, um elemento de cada vez, através de pontos e linhas. É simulada por elementos de barra.

Ambos os modelos se encontram representados na Figura 3-24.

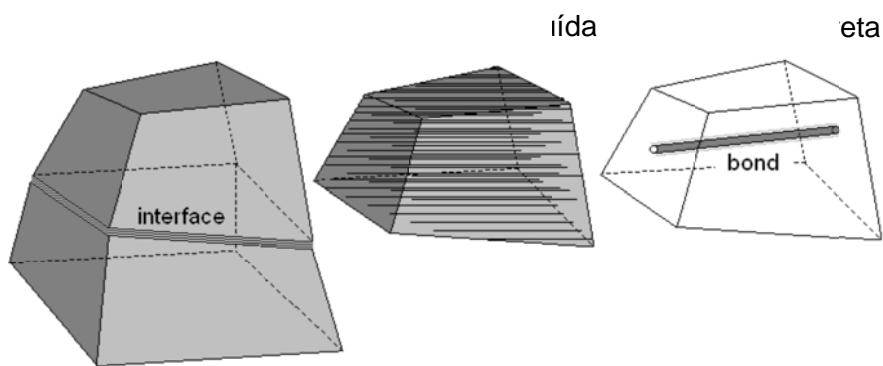


Figura 3-24 – Modelos de armaduras [11]

### 3.6.3 Relações Tensão-Deformação

Estas relações podem ser definidas como:

- Linear – Neste tipo de relação, o módulo de Elasticidade mantém-se sempre constante.
- Elasto-plástico perfeito – O módulo de Elasticidade mantém-se constante até se alcançar a tensão de cedência, a partir da qual o módulo de Elasticidade se torna nulo.
- Bilinear com endurecimento – Este comportamento é semelhante ao Bilinear, mas com a particularidade de que, após cedência, o módulo de elasticidade passa para um valor muito reduzido, a escolher, até se tingir a rotura.
- Multilinear – Pode-se definir as relações através de pontos (tensão/extensão), de modo a criar um modelo com comportamento próximo do comportamento obtido em ensaios do aço em laboratório.

### 3.6.4 Modelos de Aderência

O software ATENA permite o uso de modelos de aderência para as armaduras discretas, modelos esses que definem a transferência de tensões da armadura para o betão. Os modelos de aderência baseiam-se nas relações *bond-slip*, relações que definem as tensões máximas de aderência, de acordo com o escorregamento entre os materiais.

Existem dois modelos definidos no software, um baseado no CEB-FIP Model Code 1990 [3] e outro baseado nos estudos de Bigaj [7]. Existe ainda um terceiro modo, que pode ser definido pelo utilizador.

Os modelos pré-definidos levam em conta factores característicos do material, como a resistência do betão e o diâmetro das armaduras. Levam também em conta duas características que têm de ser fornecidas pelo utilizador, as condições de confinamento e a qualidade do betão em causa. Os modelos encontram-se ilustrados na Figura 3-25.

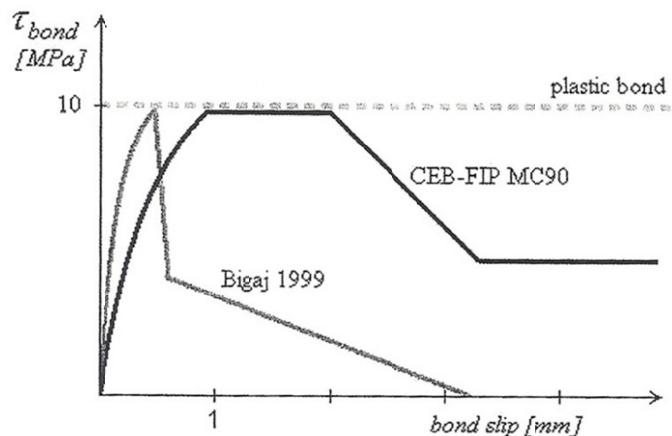


Figura 3-25 – Modelos pré-definidos de *Bond Slip* [23]

De notar que é apenas uma representação, pois os modelos dependem de diversas condições.



## 4 DESCRIÇÃO DOS MODELOS E ENSAIOS

### 4.1 Modelos Experimentais (Inácio, 2010)

#### 4.1.1 Geometria

Para efeitos de análise experimental em laboratório, foram construídos 5 modelos de laje, sendo um modelo de referência, de modo a servir de comparação aos resultados obtidos nos outros, e os restantes, reforçados com parafusos verticais de diversos diâmetros e diferentes apertos iniciais dos parafusos. Os ensaios experimentais foram realizados por Duarte [17].

Os modelos foram designados de ID1 a ID5, têm de dimensões  $1,80 \times 1,80 \text{ m}^2$ , com uma espessura de 0,12m e com um pilar central de dimensões  $0,20 \times 0,20 \text{ m}^2$  simulado por uma placa de aço com 50mm de espessura. O ensaio foi feito prescrevendo deslocamentos no pilar central, por meio de um macaco hidráulico, mantendo fixas as zonas de apoio predefinidas, correspondentes às zonas de momento nulo para uma laje interior de 3,4m de vão.

#### 4.1.1.1 Laje ID1

Na Figura 4-1 encontra-se a laje em planta, assim como as suas dimensões, e na Figura 4-2 encontra-se o corte A-A da laje.

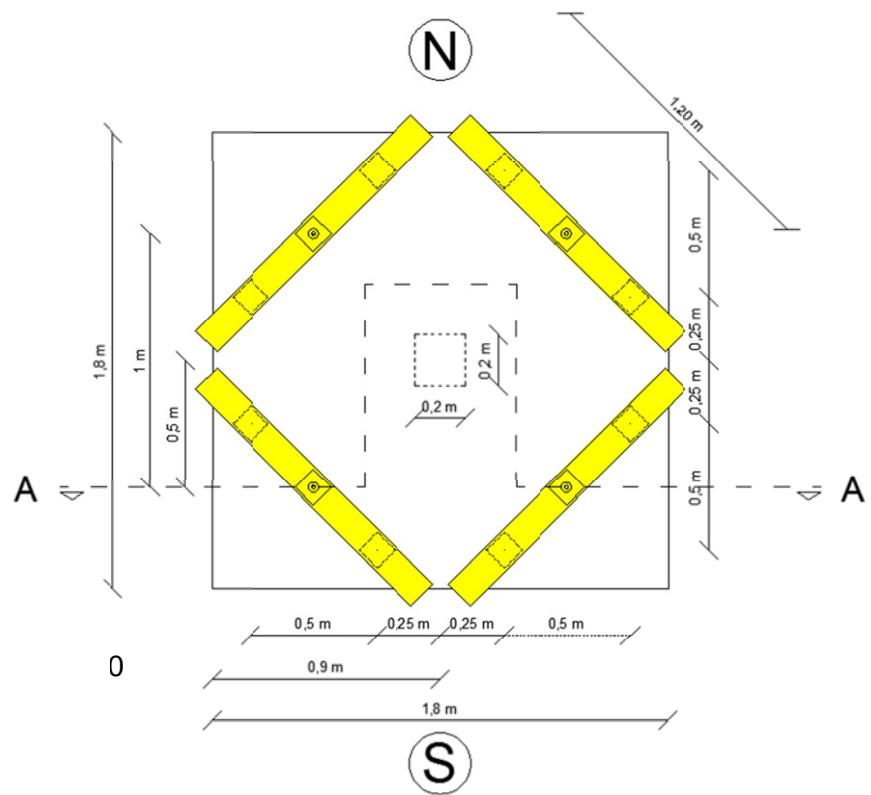


Figura 4-1 – Planta da laje ID1

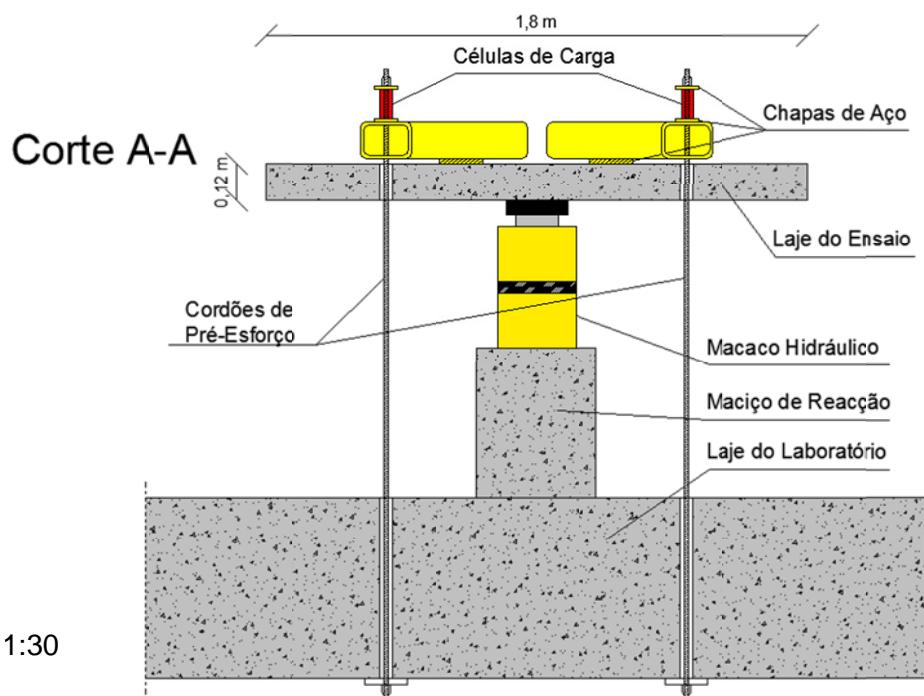


Figura 4-2 – Corte da laje no ensaio

#### 4.1.1.2 Laje ID2, ID3, ID4 e ID5

Estas lajes têm geometria igual à laje ID1, acrescentando o reforço por parafusos, como mostrado na Figura 4-3. A Figura 4-4 mostra em pormenor a geometria do reforço utilizado.

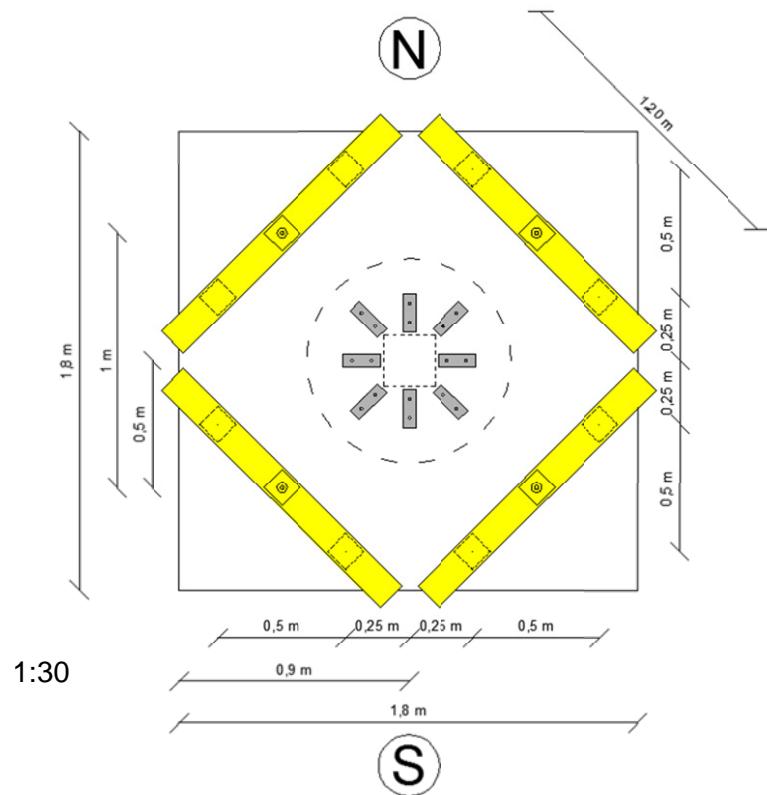


Figura 4-3 – Planta das lajes ID2 a ID5

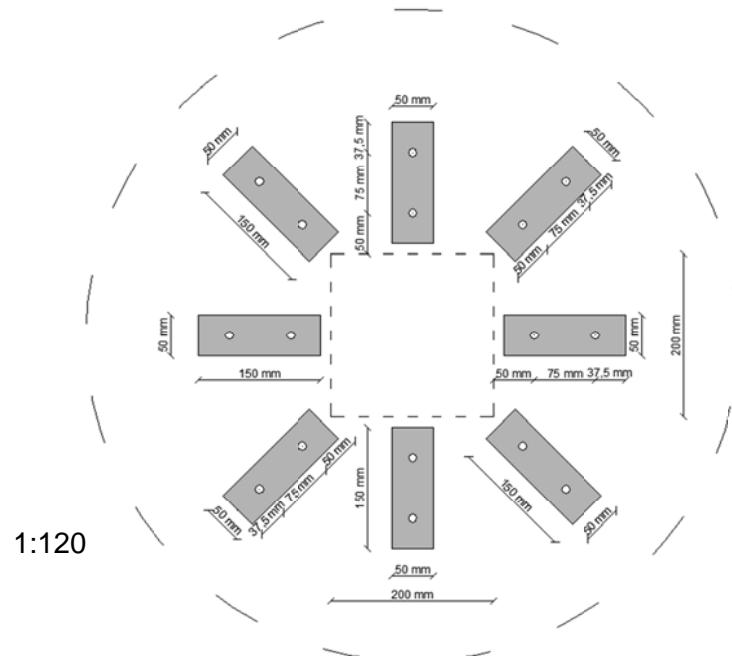


Figura 4-4 – Pormenor da geometria do reforço das lajes

No que diz respeito a armaduras longitudinais, a laje foi dimensionada de modo a que a rotação ocorra por punçamento, e não por flexão.

As armaduras superiores são constituídas por uma malha quadrada de  $\Phi 10 // 0,075\text{m}$ , e as armaduras inferiores, por uma malha quadrada de  $\Phi 6 // 0,20\text{m}$ , de acordo com a Figura 4-5.

O recobrimento adoptado foi de 20mm na face superior e de 10 mm na face inferior, o que leva a uma altura útil de aproximadamente 90mm. Para maior precisão, foram medidas as alturas médias das armaduras para todos os modelos, como descrito no Quadro 4-1.

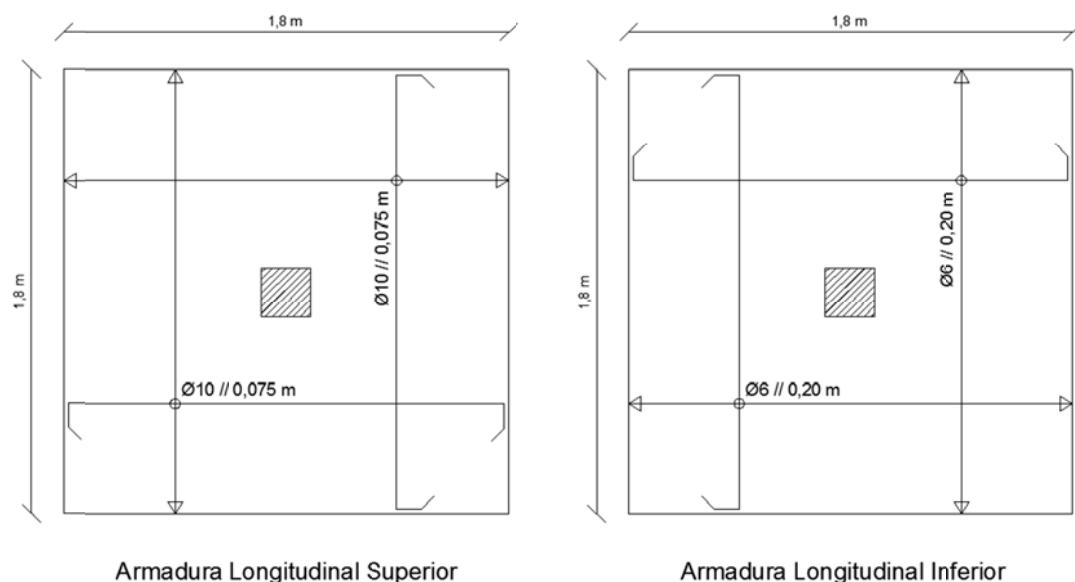


Figura 4-5 – Esquema das armaduras das lajes

Quadro 4-1 – Alturas úteis das lajes

Modelo	ID1	ID2	ID3	ID4	ID5
Altura útil, d (mm)	87	84	90	90	94

#### 4.1.2 Materiais

Os materiais descritos pela empresa de pré-fabricação indicam uma classe do betão C35/45 e um aço A400. Foram utilizadas amostras dos mesmos para confirmar os valores fornecidos pela empresa, assim como a aplicação da regulamentação com os valores médios obtidos nos ensaios, e não os de dimensionamento.

#### 4.1.2.1 Betão

Dos materiais utilizados no ensaio, foram ensaiados 9 provetes de betão por cada laje ensaiada num teste de resistência à compressão em cubos, de acordo com as normas em vigor. Para preparação e cura, foram utilizadas as normas NP EN 12390-1 [26] e NP EN 12390-2 [27], respectivamente. Os ensaios dos provetes de betão foram feitos de acordo com a norma NP EN 12390-3 [28].

Os resultados obtidos encontram-se no Quadro 4-2, assim como a idade dos provetes na altura do ensaio.

Quadro 4-2– Características do Betão

Laje	$f_{ccm}$ [MPa]	$f_{cm}$ [MPa]	$E_c$ [GPa]	Idade [dias]
ID1	49,2	39,3	28,9	65
ID2	52,3	41,9	29,5	68
ID3	59,6	47,7	30,8	81
ID4	59,7	47,7	30,8	99
ID5	59,8	47,9	30,8	110

De onde os resultados de  $f_{ccm}$  foram obtidos directamente da média dos ensaios aos provetes cúbicos, e a resistência média em provetes cilíndricos,  $f_{cm}$ , o módulo de elasticidade,  $E_c$ , foram obtidos através das seguintes expressões.

$$f_{cm} = 0,8 * f_{ccm} \quad (4.1)$$

$$E_c = 8,482 * \sqrt[3]{f_{cm}} \quad (4.2)$$

#### 4.1.2.2 Aço para armaduras longitudinais

Para ensaios das características do aço, foram ensaiados 4 provetes para cada diâmetro utilizado,  $\Phi 6$  e  $\Phi 10$ , sendo sujeitos a um ensaio de tracção. Neste ensaio foram obtidos resultados para a tensão de cedência e tensão de rotura, de acordo com a norma NP EN 10002-1 [25].

Como já referido anteriormente, o aço utilizado foi um aço A400, laminado a quente. Ambos os diâmetros utilizados eram rugosos, de modo a garantir boa aderência entre o aço e o material betão.

Os resultados encontram-se na Quadro 4-3.

Quadro 4-3 – Características do Aço

Diâmetro	Tipo	$f_{sy}$ [MPa]	$f_{su}$ [MPa]
$\Phi 6$	NR	588	697
$\Phi 10$	NR	445	582

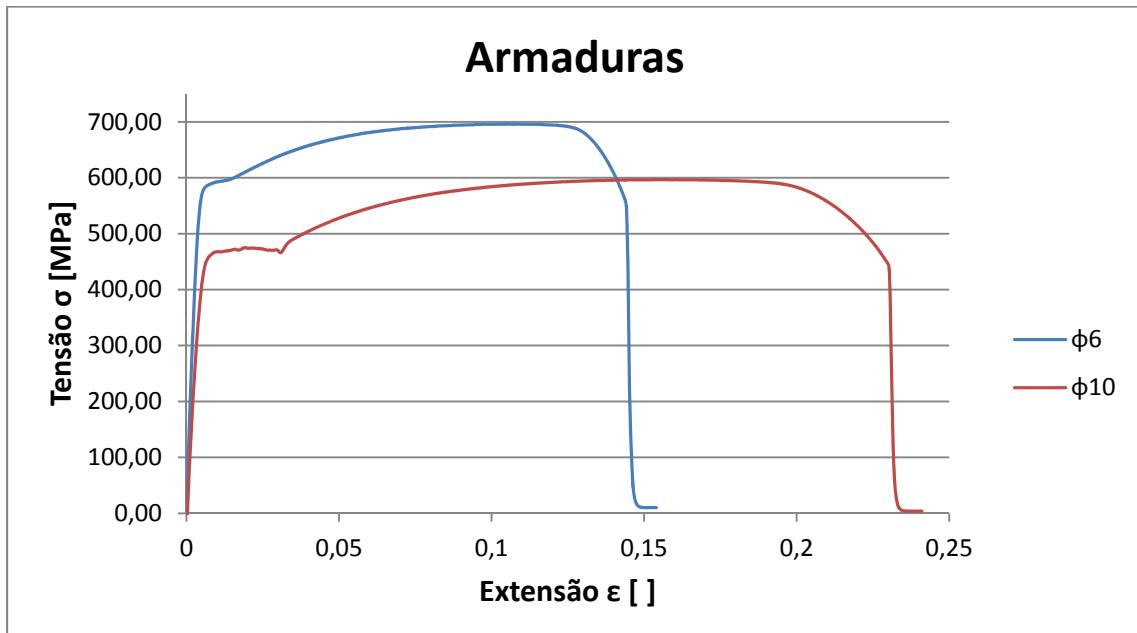


Figura 4-6 – Relações tensão-deformação obtidas no ensaio de tracção aos varões fornecidos

Pelos resultados obtidos nos ensaios, observa-se também que as armaduras de diâmetro de 6mm, obtiveram resistências superiores às especificadas, correspondendo a um aço A500.

As armaduras de diâmetro de 6mm apresentam também um patamar de cedência muito pouco evidente, o que poderia levar a crer que fossem endurecidas a frio e não laminadas a quente.

#### 4.1.2.3 Aço para parafusos de Reforço

Para o reforço foram utilizados parafusos de 3 diâmetros diferentes, roscados em todo o seu comprimento excepto no centro, para facilitar a colocação de extensómetros.

A geometria dos parafusos encontra-se na Figura 4-7.

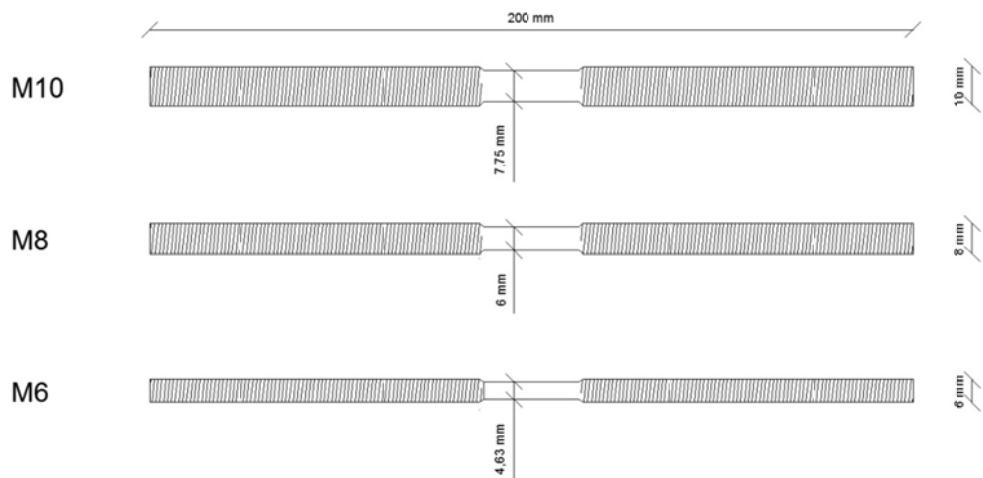


Figura 4-7 – Geometria dos parafusos de reforço

Foram também sujeitos a ensaios de tracção, estando os resultados no Quadro 4-4, assim como as suas características,  $S_0$ , que representa a secção transversal do parafuso,  $F_{p0,2}$ , força limite proporcionalidade a 0,2%,  $F_u$ , Força última,  $\sigma_{p0,2}$ , tensão limite proporcionalidade a 0,2% e  $\sigma_u$ , tensão última. Os diagramas tensão-deformação obtidos dos de tracção encontram-se na Figura 4-8 e Figura 4-9.

Quadro 4-4 – Características dos Parafusos

Modelo	Diâmetro	$S_0$ [mm $^2$ ]	$F_{p0,2}$ [kN]	$F_u$ [kN]	$f_{p0,2}$ [MPa]	$f_u$ [MPa]
ID2	M10	47,2	24,3	28,6	516	605
ID3	M6	16,6	7,0	8,0	421	481
ID4, ID5	M8	28,3	14,8	16,6	523	587

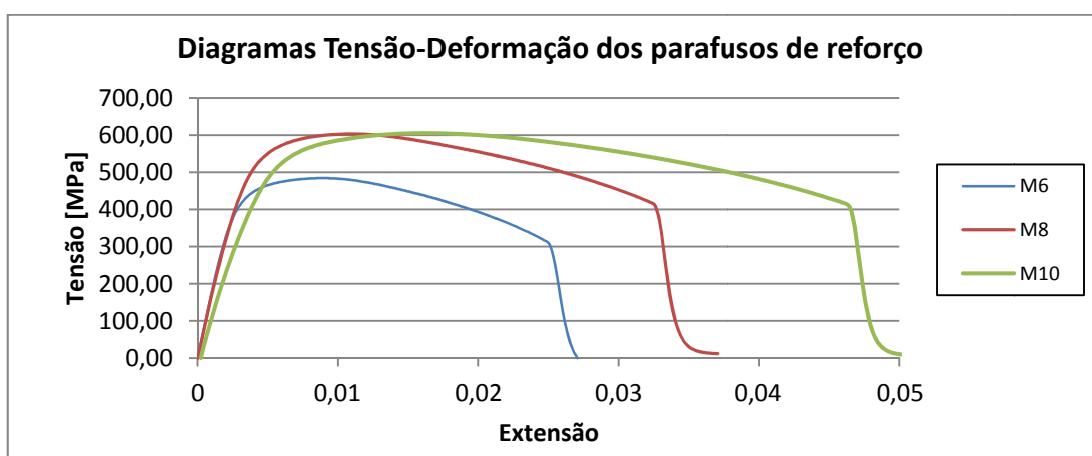


Figura 4-8 – Relações tensão-deformação dos parafusos de reforço

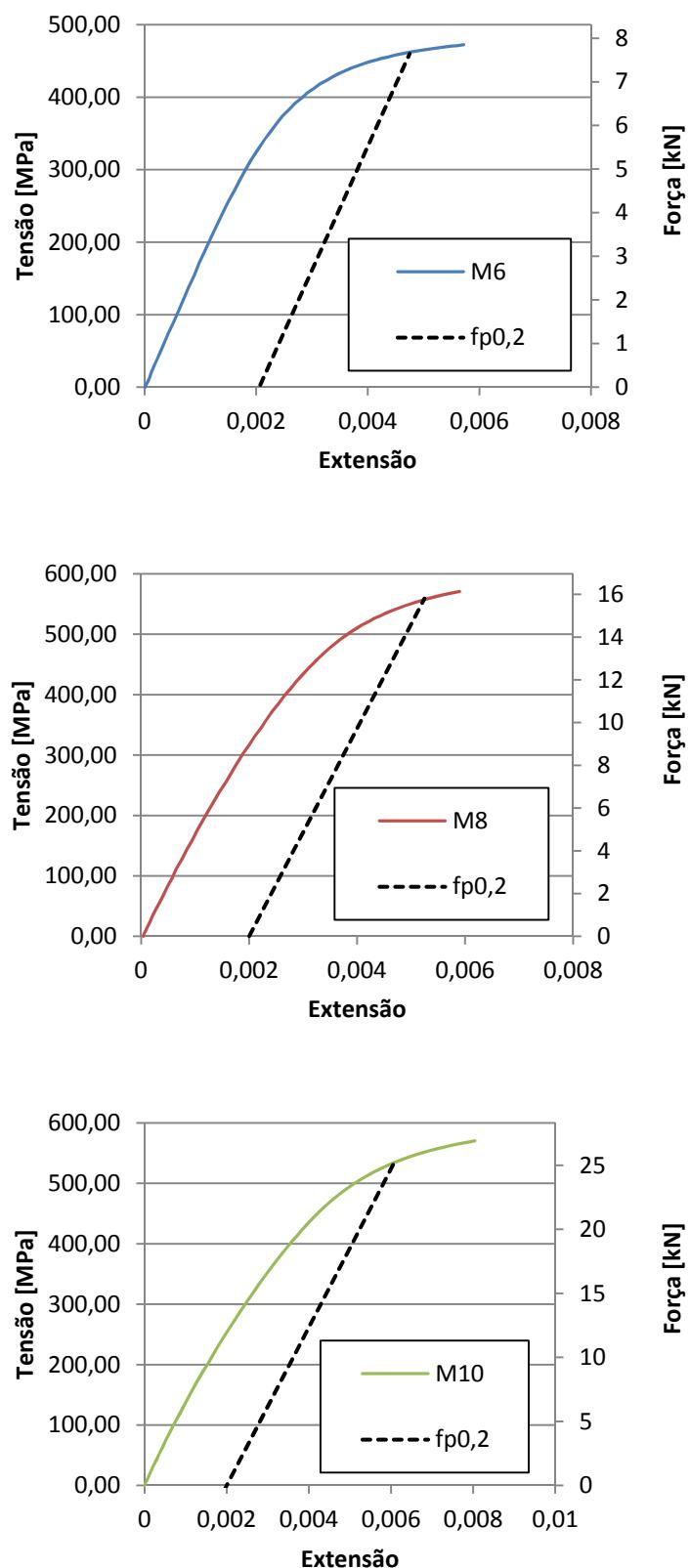


Figura 4-9 – Relações tensão-deformação e tensões limite proporcionalidade dos parafusos de reforço

#### 4.1.3 Instrumentação

Para monitorizar a evolução dos ensaios ao longo do carregamento, foram utilizados deflectómetros, extensómetros e células de carga.

Os deflectómetros foram colocados ao longo do eixo Oeste-Este da laje, e numerados de acordo com a Figura 4-10.

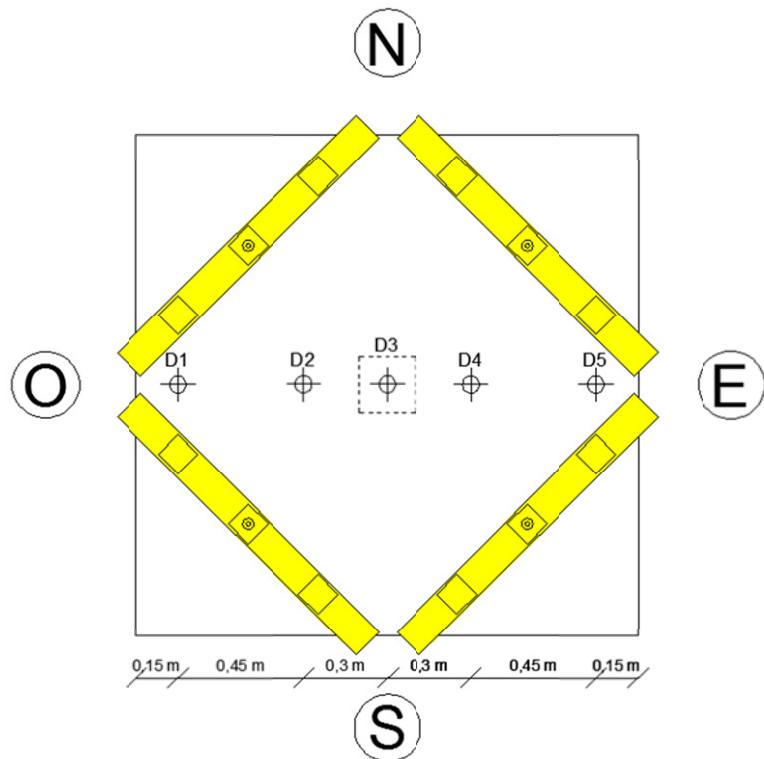


Figura 4-10 – Deflectómetros presentes no ensaio

Os extensómetros foram colados aos varões superiores, no sentido N-S, antes da betonagem, em dois lados opostos do varão, num total de 6 extensómetros para 3 varões.

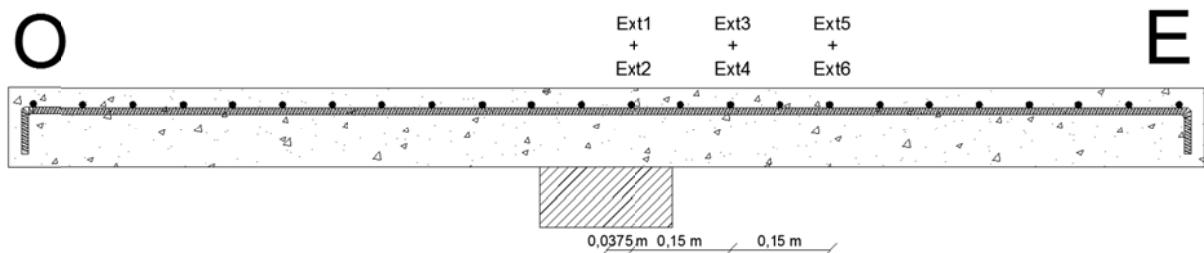


Figura 4-11 – Localização dos extensómetros nos varões no eixo N-S

Foram também colocados extensómetros nos parafusos, na zona central, lisa, de forma a ser possível observar as extensões em cada parafuso, ao longo do carregamento. Devido a condições de simetria, só foram colocados extensómetros em metade dos parafusos.

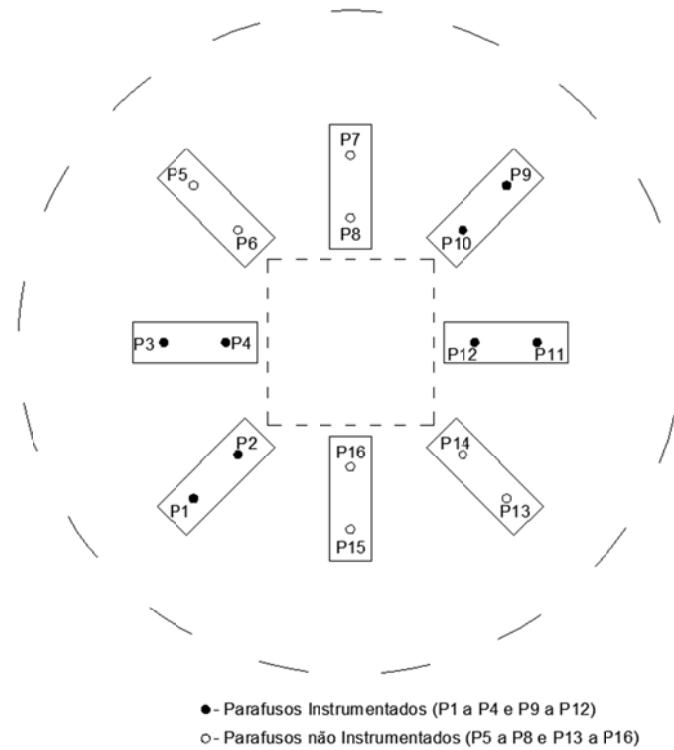


Figura 4-12 – Localização dos extensómetros nos parafusos de reforço

#### 4.1.4 Execução do Ensaio

##### 4.1.4.1 Laje ID1

A laje de referência, sem qualquer tipo de reforço, foi simplesmente carregada até à rotura, por meio de um macaco hidráulico, carregando a uma velocidade constante, sendo as leituras da instrumentação feitas de forma automática.

##### 4.1.4.2 Lajes ID2 a ID5

As restantes lajes foram carregadas numa 1<sup>a</sup> fase até cerca de 60% da carga de rotura da laje de referência ID1, de forma a simular a utilização normal da laje, com necessidade de reforço. Essas cargas estão representadas no Quadro 4-5.

Posteriormente, cada laje foi descarregada e foi executado o respectivo reforço.

Quadro 4-5 – Cargas da 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> fase do carregamento

Modelo	Carga da 1 <sup>a</sup> Fase [kN]	% da Carga Última da laje ID1	Carga da 2 <sup>a</sup> Fase (Rotura) [kN]
ID1	-	-	269
ID2	166,4	62	406
ID3	159,9	59	331
ID4	170,5	63	381
ID5	170,3	63	366

O reforço foi feito com execução de furos verticais na laje para os parafusos, com o auxílio de um Ferroscan da Hilti, de modo a não danificar as armaduras da laje. Executou-se uma pequena reparação ao destacamento de betão na face inferior da laje, que teve origem aquando da execução dos furos, utilizando um betume de pedra.

Após a cura dessa argamassa, foram colocados os parafusos, assim como as chapas que servem de ancoragem aos parafusos de reforço, e aplicado o respectivo pré-esforço nos parafusos. Os valores do pré-esforço aplicado estão apresentados no Quadro 4-6.

Quadro 4-6 – Pré-esforço nos parafusos de reforço

Modelo	Parafusos de reforço	Pré-esforço nos parafusos [kN]
ID2	M10	11,2
ID3	M6	3,3
ID4	M8	5,9
ID5	M8	1,4

Posteriormente à intervenção, numa 2<sup>a</sup> Fase, as lajes foram carregadas até à rotura.

No Quadro 4-7, encontram-se as cargas correspondentes ao aparecimento de fendas visíveis a olho nu.

Quadro 4-7 – Cargas de fendilhação dos modelos ID1 a ID5 nos ensaios experimentais

Modelo	Carga correspondente ao aparecimento de fendas [kN]	
	Fendas tangenciais	Fendas Radiais
ID1	95	110
ID2	108	124
ID3	104	120
ID4	98	116
ID5	99	122

## 4.2 Modelação Numérica

### 4.2.1 Geometria

Para facilitar a análise, foi aproveitada a simetria da laje, simulando apenas um quarto da laje, com as condições de fronteira necessárias, ver Figura 4-13. Para os eixos de simetria, não são permitidos deslocamentos horizontais, nem rotações, resultando em encastramentos deslizantes, que serão simulados no ATENA como apoios contínuos ao longo de uma superfície. Os ensaios foram efectuados com deslocamento prescrito no centro do pilar, mantendo fixas com apoios verticais as chapas localizadas na zona de momentos nulos. Esses apoios são pontuais, de forma a não restringir rotações.

Foram utilizados elementos finitos Hexaedros, ou também designados por *Bricks*, vistos que já foi demonstrado por Inácio [23] que a utilização de elementos Shell traduz-se em resultados de baixa qualidade.

Para cada laje ensaiada, foram criados 3 modelos, de modo a verificar a influência da alteração do modelo de fendilhação e do tamanho dos elementos finitos.

O primeiro modelo foi criado com elementos finitos com tamanho máximo de 3cm, resultando num total de 5424 elementos, e um coeficiente de 1,0 para a relação entre o FCM e o RCM.

O segundo modelo foi criado com o mesmo refinamento da malha que o modelo anterior, mas alterando a relação entre o FCM e o RCM para 0,5. Este modelo é designado por RCM.

O terceiro modelo, foi criado utilizando a relação de 0,5 entre o FCM e o RCM mas alterando o refinamento da malha, para elementos finitos de tamanho máximo de 2,4cm, resultando num total de 8669 elementos. Este modelo é designado por RCM REF.

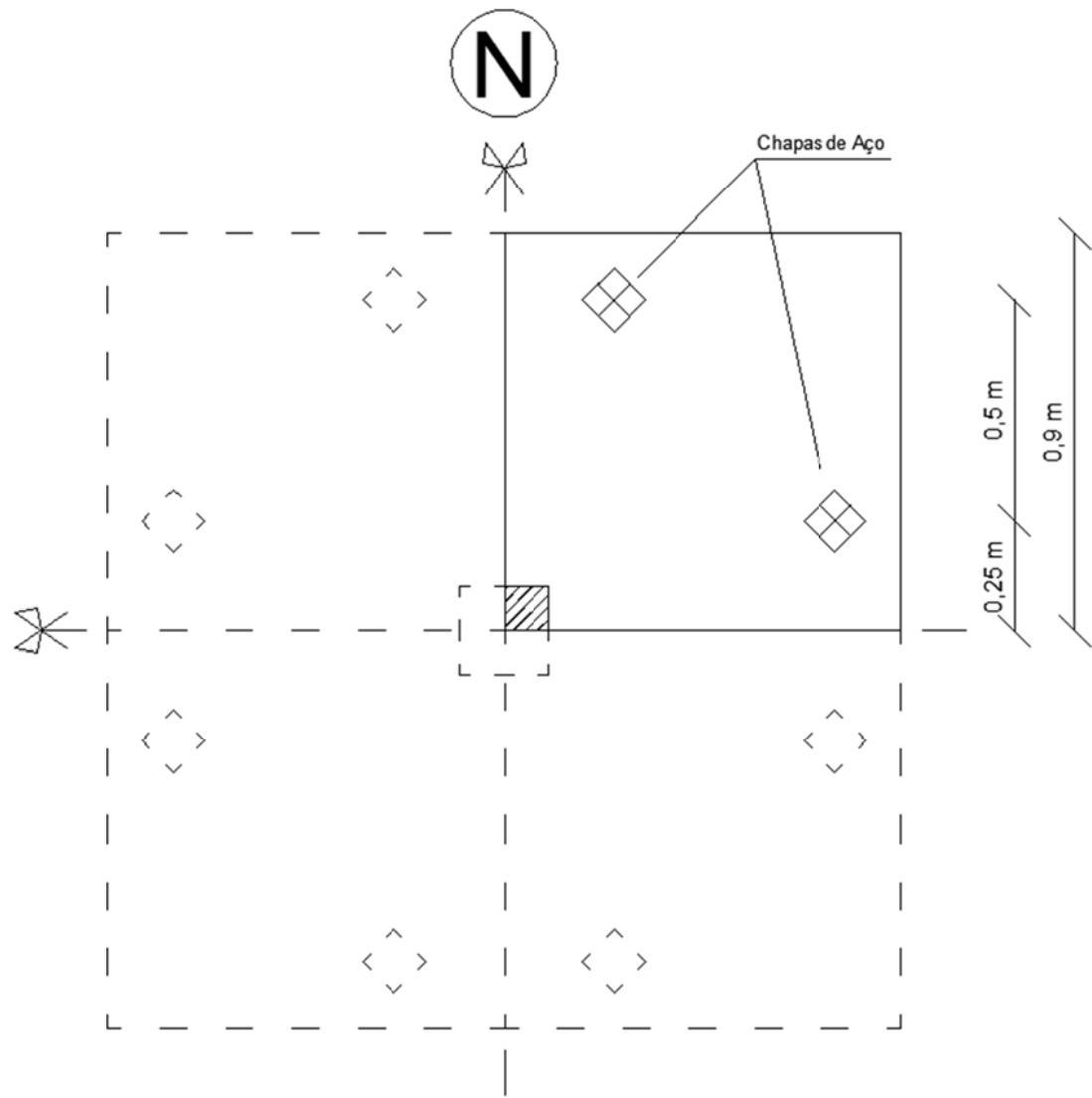


Figura 4-13 – Geometria do modelo no ATENA

#### 4.2.1.1 Laje ID1

A geometria adoptada está demonstrada na Figura 4-14.

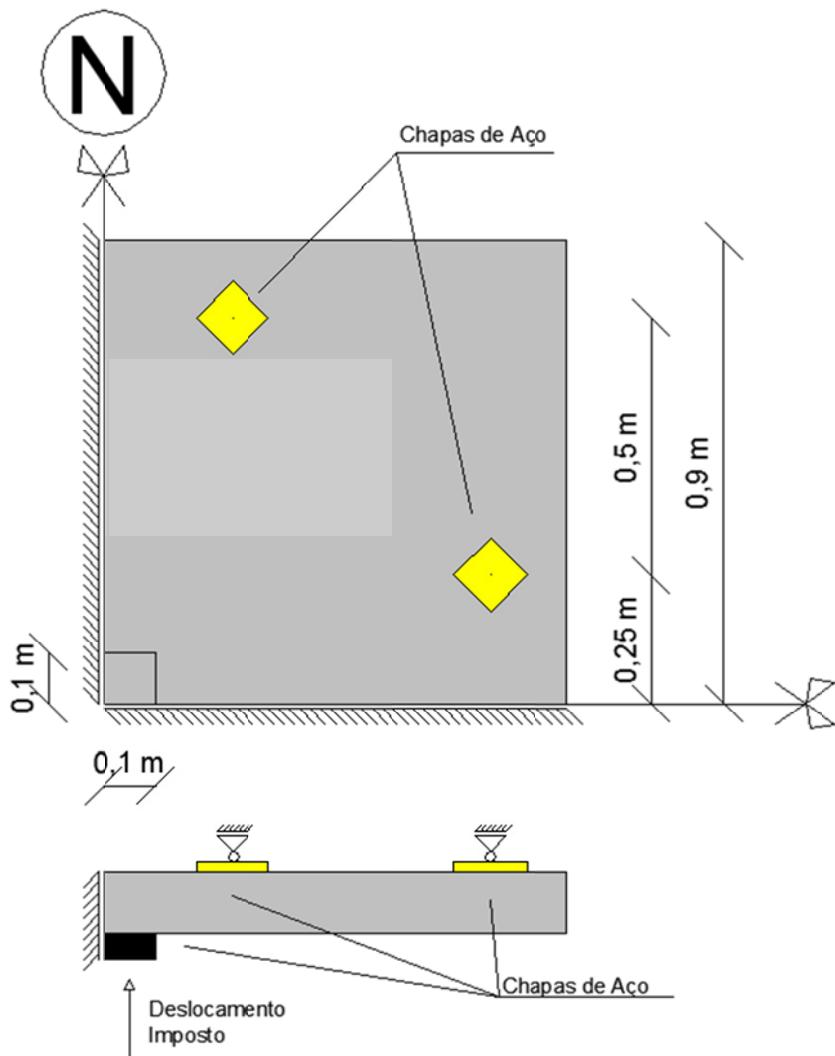


Figura 4-14 – Geometria do modelo ID1 no ATENA; Cima – 1/4 Laje em planta; Baixo – 1/4 Laje em corte

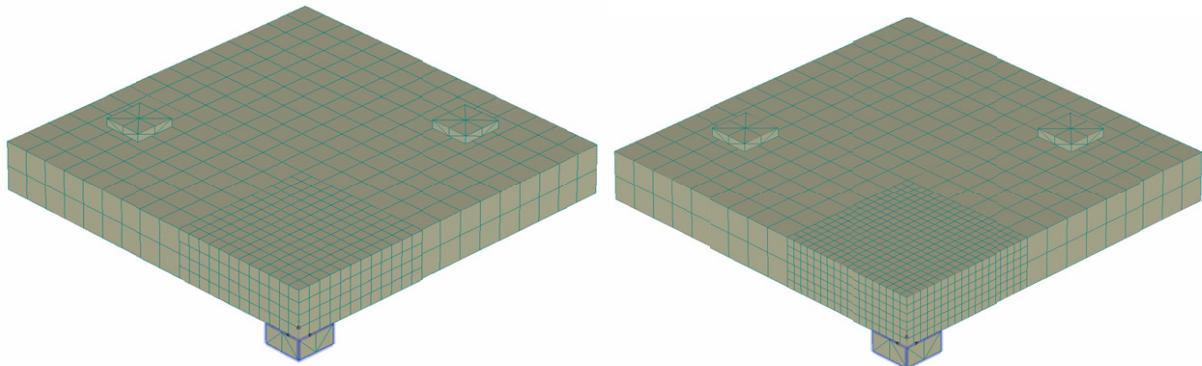


Figura 4-15 – Modelo ID1 representado pelo pré-processamento do software ATENA, para os dois refinamentos utilizados

#### 4.2.1.2 Lajes ID2 a ID5

Nestas lajes foram aproveitadas também as condições de simetria para parte das chapas de aço, e para parte dos parafusos. Essas chapas foram simuladas com apenas metade da chapa, sendo que na zona de simetria foram empregues as mesmas condições de fronteira utilizadas para a laje, apoios simples horizontais ao longo de uma superfície. Para os parafusos localizados sobre o eixo de simetria, apenas foi utilizada metade da área útil do parafuso, de maneira a simular a simetria da laje.

A geometria adoptada está demonstrada na Figura 4-16.

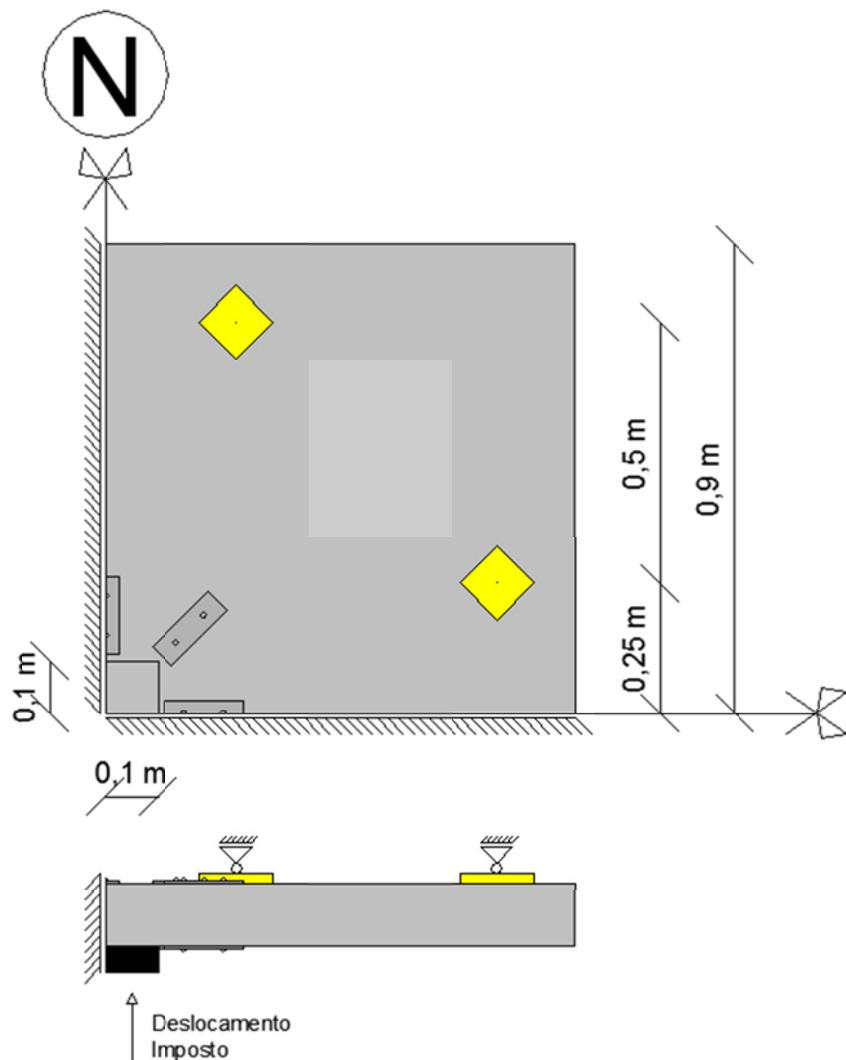


Figura 4-16 – Geometria do modelo ID2 a ID5 no software ATENA; Cima – 1/4 Laje em planta; Baixo – 1/4 Laje em corte

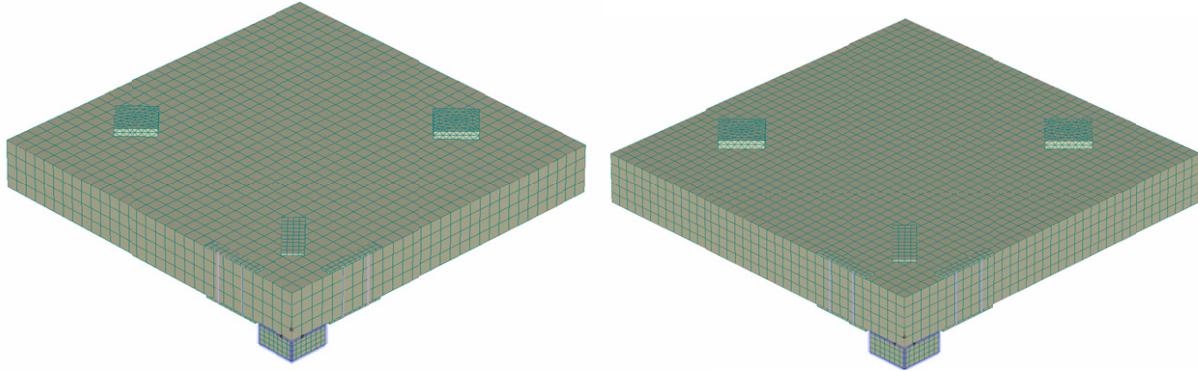


Figura 4-17 – Modelo ID2 a ID5 representado pelo pré-processamento do software ATENA, para os dois refinamentos utilizados

#### 4.2.2 Materiais

##### 4.2.2.1 Betão

Para o material betão, foram introduzidas as características de acordo com os resultados obtidos nos ensaios experimentais de Duarte [17].

Foram introduzidos o Módulo de Elasticidade e Resistência à compressão do betão, e foi estimada a resistência à tracção do betão,  $f_{ctm}$ , de acordo com o EC2, de acordo com as fórmulas:

$$f_{ctm} = 0,30 * f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (4.3)$$

$$f_{ck} = f_{cm} - 8 \quad (4.4)$$

$$E_{c,tangencial} = 22 * \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (4.5)$$

Onde a tensão de resistência à tracção,  $f_{ctm}$ , foi estimada através da tensão característica de resistência à compressão do betão,  $f_{ck}$ .

O módulo de Elasticidade utilizado foi o Módulo de Elasticidade Tangencial,  $E_{c,tangencial}$ , e não o Módulo de Elasticidade Secante calculado por Duarte [17], e foi estimado através da tensão média de resistência à compressão.

Para a energia de fractura foi deixado o valor predefinido, sendo esse valor deduzido da resistência à tracção do betão, de acordo com a expressão (4.6).

$$G_f = 0,000025 * f_{ctm} \quad (4.6)$$

Os resultados obtidos encontram-se no Quadro 4-8.

Quadro 4-8 – Características do Betão no software ATENA

Laje	$f_{cm}$ [MPa]	$E_{c,secante}$ [GPa]	$E_{c,tangencial}$ [GPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$G_f$ [MN/m]
ID1	39,3	28,9	33,2	3,00	7,50E-05
ID2	41,9	29,5	33,8	3,16	7,90E-05
ID3	47,7	30,8	35,2	3,51	8,78E-05
ID4	47,7	30,8	35,2	3,51	8,78E-05
ID5	47,9	30,8	35,2	3,52	8,80E-05

#### 4.2.2.2 Aço para armaduras longitudinais

As armaduras longitudinais foram simuladas como armaduras discretas, na devida altura útil da laje, simulando o facto das armaduras numa das direcções estarem abaixo da altura útil, e noutra direcção estarem acima da altura útil.

Para o seu comportamento, foram utilizados modelos multilineares, com base em pontos obtidos dos ensaios de tracção efectuados aos varões.

Uma ilustração desses modelos, assim como a comparação com os resultados obtidos nos ensaios de tracção, encontram-se na Figura 4-18 e na Figura 4-19.

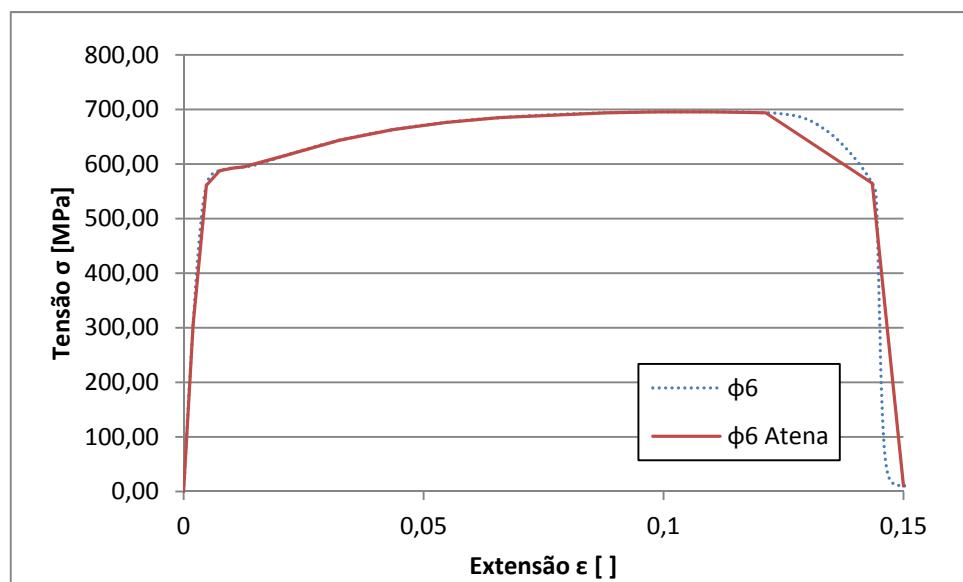


Figura 4-18 – Diagrama tensão-deformação dos varões de diâmetro de 6mm

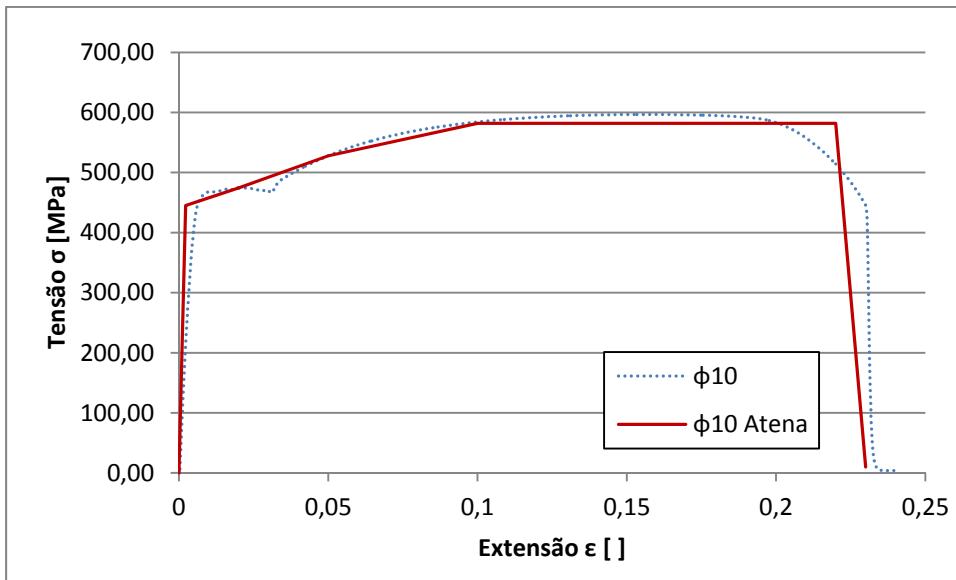


Figura 4-19 – Diagrama tensão-deformação dos varões de diâmetro de 10mm

Para o diagrama dos varões de diâmetro 10 foi utilizado um valor do módulo de elasticidade de 200 GPa até ao valor da cedência.

#### 4.2.2.3 Aço para parafusos de reforço

Os parafusos de reforço foram também simulados como armaduras discretas, com o diâmetro correspondente à zona central do parafuso, com o comportamento tensão-deformação multilinear adaptado dos diagramas obtidos nos ensaios laboratoriais.

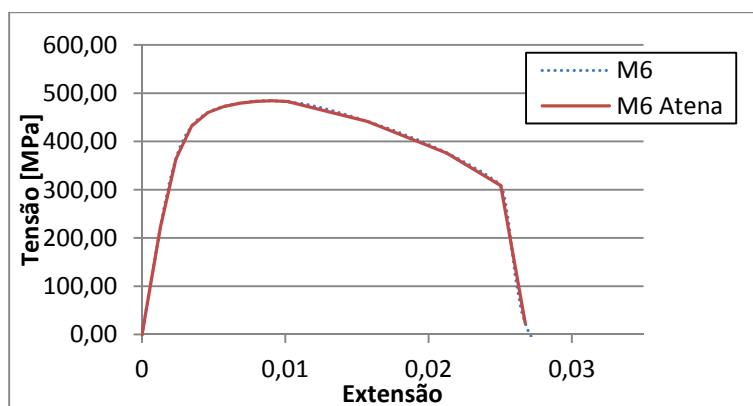


Figura 4-20 – Evolução da tensão com a extensão no parafuso de diâmetro M6 e o respectivo modelo numérico

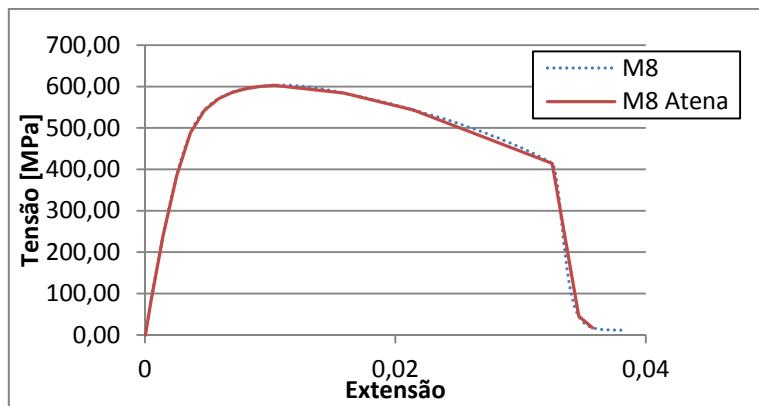


Figura 4-21 – Evolução da tensão com a extensão no parafuso de diâmetro M8 e o respectivo modelo numérico

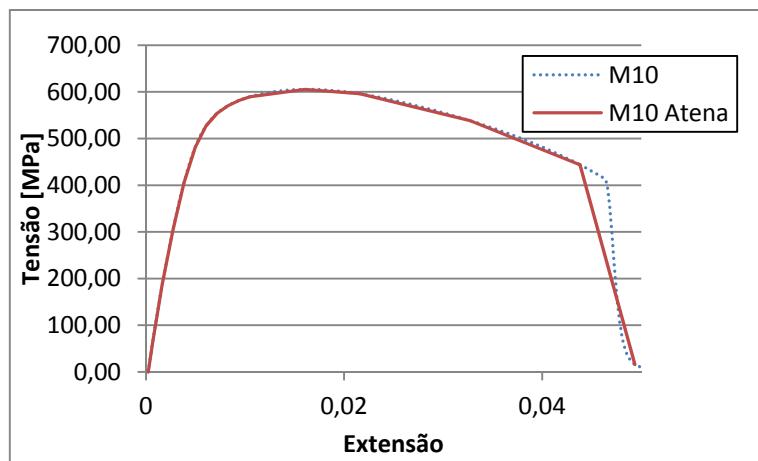


Figura 4-22 – Evolução da tensão com a extensão no parafuso de diâmetro M10 e o respectivo modelo numérico

#### 4.2.3 Pontos de aquisição de dados

Para comparação de resultados com os ensaios experimentais, foram colocados pontos de aquisição de dados equivalentes à instrumentação experimental.

Foi colocada uma célula de carga virtual na zona de deslocamento imposto, de forma a acompanhar o carregamento da laje, assim como nos apoios, para confirmação dos valores.

Para acompanhar a deformação da laje, foram colocados os deflectómetros equivalentes aos deflectómetros D3, D4 e D5 na laje laboratorial.

Foram colocados extensómetros nas armaduras, com a mesma localização que os do modelo experimental, de forma a acompanhar as extensões das armaduras, relacionando-as com o carregamento da laje. Foram apenas colocados um por cada varão, não havendo necessidade de verificar as extensões em lados diametralmente opostos do varão.

Foram também colocados extensómetros nos parafusos instalados, de forma a acompanhar a evolução da extensão máxima do parafuso ao longo do carregamento, para posterior análise e comparação com a força obtida nos ensaios experimentais.

A aquisição de dados consistiu num total de 3 células de carga, 6 deflectómetros, três para comparação da deformada com os ensaios experimentais e 3 para confirmação dos resultados obtidos nos apoios e no ponto de aplicação de carga, e 6 extensómetros.

A localização dos pontos de aquisição de dados encontra-se na Figura 4-23.

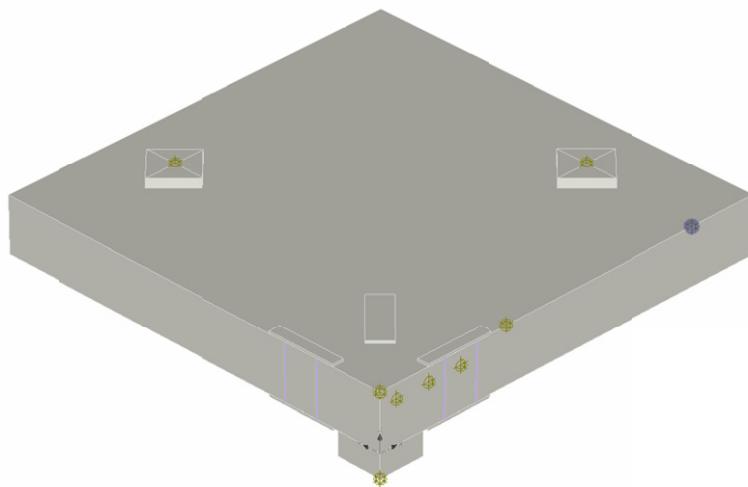


Figura 4-23 – Localização dos pontos de aquisição de dados

#### 4.2.4 Execução do Ensaio

##### 4.2.4.1 Laje ID1

À laje de referência foram impostos deslocamentos, até ser obtida a rotura. Posteriormente, continuou-se o carregamento, de modo a ter melhor percepção do modo de rotura.

##### 4.2.4.2 Lajes ID2 a ID5

Para as lajes reforçadas, foram colocados os elementos correspondentes ao reforço e foi aplicada uma variação negativa da temperatura, de modo a simular a extensão inicial correspondente ao pré-esforço dos parafusos. A variação de temperatura aplicada a cada modelo encontra-se no Quadro 4-9, assim como o pré-esforço inicial, tensões e extensões iniciais.

Quadro 4-9 – Pré-Esforço inicial e Variação de temperatura correspondente

$$(\alpha = 0,000012 \text{ } ^\circ\text{K}^{-1})$$

Laje	Parafusos	$F_{i,\text{média}}$ [kN]	$A$ [mm <sup>2</sup> ]	$\sigma$ [MPa]	$\varepsilon$	$\Delta t_{\text{eq}}$ [K]
ID2	M10	11,2	47,2	237,4	0,00207	172,8
ID3	M6	3,3	16,8	196,0	0,0011	90,1
ID4	M8	5,9	28,3	208,7	0,0012	103,7
ID5	M8	1,4	28,3	49,5	0,0003	22,2

Seguidamente, de forma semelhante à laje ID1, as lajes foram carregadas até à pós-rotura, de forma a melhorar a percepção do modo de rotura.

Foi estimado o momento crítico, e a correspondente carga aplicada, de modo a comparar com o patamar linear elástico inicial, acabando quando se atinge a resistência à tracção do betão na fibra superior.

$$M = 0,2 \cdot P \quad (4.7)$$

$$f_{ctm} = \frac{M_{cr}}{I} \cdot v \quad (4.8)$$

Obtendo-se assim os valores aproximados para a carga final do patamar elástico como definido no Quadro 4-10. No quadro encontram-se também os valores do final do patamar elástico observados nos ensaios experimentais nos ensaios de Duarte [17] e nos modelos numéricos simulados.

Quadro 4-10 – Carga crítica estimada e observada para os diversos modelos

Laje	$f_{ctm}$ [MPa]	$V_{\text{crit}}$ [kN]	$V_{\text{crit,MEF}}$ [kN]	$V_{\text{crit,EXP}}$ [kN]
ID1	3,00	64,8	75,2	56
ID2	3,16	68,3	76,5	63,4
ID3	3,51	75,8	74,4	44,2
ID4	3,51	75,8	74,6	62,2
ID5	3,52	76,0	75,0	44,31



## 5 ANÁLISE NUMÉRICA

### 5.1 Carga de rotura e Modo de rotura

Neste capítulo serão apresentadas comparações das cargas obtidas na rotura para todos os modelos disponíveis, assim como pelas normas em vigor. São também comparados os tipos de rotura obtidos nos modelos numéricos com os modelos experimentais.

Para a média dos erros, foi utilizada a média do módulo dos erros para evitar a anulação de erros pela variação entre erros positivos e negativos.

A carga prevista pelo EC2 foi calculada nos ensaios de Duarte [17] e foi calculada sem a limitação da tensão nos parafusos de reforço, sempre que a rotura ocorreu através do reforço.

A rotura mencionada refere-se sempre a punçamento, visto que foi o único tipo de rotura obtida.

Os resultados encontram-se no Quadro 5-1.

Quadro 5-1 – Comparação entre as cargas de rotura experimentais, numéricas e as previstas pela norma EC2

Modelo		Rotura		
		Carga [kN]	Erro (%)	Rotura
Modelo ID1	Experimental	269,0	-	Junto ao pilar
	EC2	274,0	-1,9%	
	ID1	273,4	-1,6%	
	Numérico ID1 RCM	249,4	7,3%	
Modelo ID2	ID1 RCM Refinado	274,8	-2,2%	Exterior ao reforço
	Experimental	406,0	-	
	EC2	396,0	2,5%	
	ID2	341,6	15,9%	
Modelo ID3	Numérico ID2 RCM	332,9	18,0%	Através do reforço
	ID2 RCM Refinado	347,0	14,5%	
	Experimental	331,0	-	
	EC2	316,0	4,5%	
Modelo ID4	ID3	359,2	-8,5%	Exterior ao reforço
	Numérico ID3 RCM	352,9	-6,6%	
	ID3 RCM Refinado	361,0	-9,1%	
	Experimental	381,0	-	
Modelo ID5	EC2	425,0	-11,5%	Através do reforço
	ID4	367,4	3,6%	
	Numérico ID4 RCM	358,3	6,0%	
	ID4 RCM Refinado	368,5	3,3%	
Modelo ID5	Experimental	366,0	-	Mista Exterior/Através do reforço
	EC2	431,0	-17,8%	
	ID5	379,1	-3,6%	
	Numérico ID5 RCM	373,4	-2,0%	
	ID5 RCM Refinado	377,4	-3,1%	Mista Exterior/Através do reforço

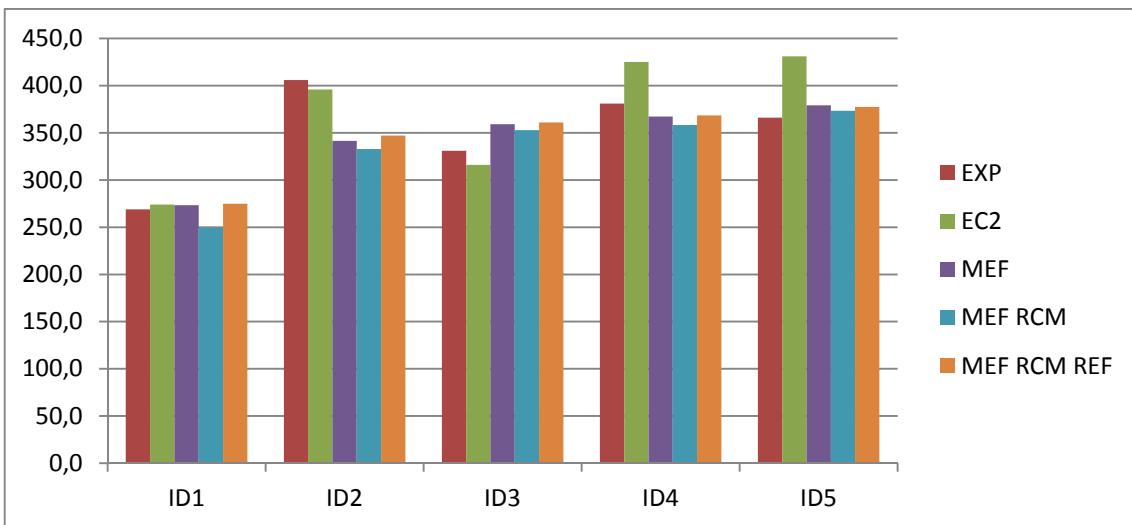


Figura 5-1 – Comparação entre as cargas de rotura experimentais, numéricas e as previstas pela norma EC2

Quadro 5-2 – Variação máxima da carga de rotura nos modelos numéricos

Variação entre modelos numéricos:		
Laje	Variação [kN]	Variação [%]
ID1	25,4 [kN]	9,23%
ID2	14,1 [kN]	4,07%
ID3	8,2 [kN]	2,26%
ID4	10,2 [kN]	2,77%
ID5	5,7 [kN]	1,51%

Quadro 5-3 – Média dos erros obtidos face ao valor experimental

Média dos erros em relação ao valor experimental:	
Normas	7,6%
Inicial	6,6%
RCM	8,0%
RCM Refinado	6,4%

É possível observar uma boa aproximação das cargas previstas pelos modelos numéricos para qualquer uma das lajes ensaiadas. Os piores resultados foram obtidos nos modelos numéricos da laje ID2, onde a modelação numérica obteve erros de entre 14,5% a 18%, erros claramente superiores aos erros obtidos nos restantes modelos numéricos. Os resultados obtidos demonstram a influência da resistência do betão na carga de rotura nos modelos numéricos, visto que este modelo, o modelo ID2, semelhante aos restantes, apesar

da presença de uma maior armadura de reforço e de ter obtido um modo de rotura semelhante aos modelos ID4 e ID5, obteve uma menor carga de rotura.

O modelo também não conseguiu prever a influência do pré-esforço entre os modelos ID4 e ID5, prevendo uma carga de rotura superior para o modelo ID5, quando nos ensaios experimentais o modelo ID4 obteve uma maior carga de rotura. Estes resultados devem-se ao facto de o modelo numérico ter dado pouca importância ao pré-esforço inicial, e bastante importância à resistência do betão e seu módulo de elasticidade, que são superiores no modelo ID5.

O modo de rotura foi previsto com exactidão, apesar de no modelo ID5 haver alguma dificuldade em perceber se a rotura ocorreu através do reforço ou pelo exterior do reforço. As diferenças obtidas nesse modelo estão relacionadas com o facto de as cargas de rotura previstas pela norma EC2 para a rotura através do reforço e rotura pelo exterior do reforço serem muito semelhantes, e no modelo experimental a rotura ocorrida foi mista, tendo ocorrido pelo interior na direcção da menor altura útil das armaduras longitudinais e pelo exterior na zona de maior altura útil das armaduras longitudinais.

Da Figura 5-2 à Figura 5-6 estão representados os modos de rotura obtidos para todos os modelos.

Para boa visibilidade do modo de rotura, as figuras mostram as extensões principais na laje, assim como fendas com abertura superior a 0,3mm para alguns passos após a rotura ter sido atingida.

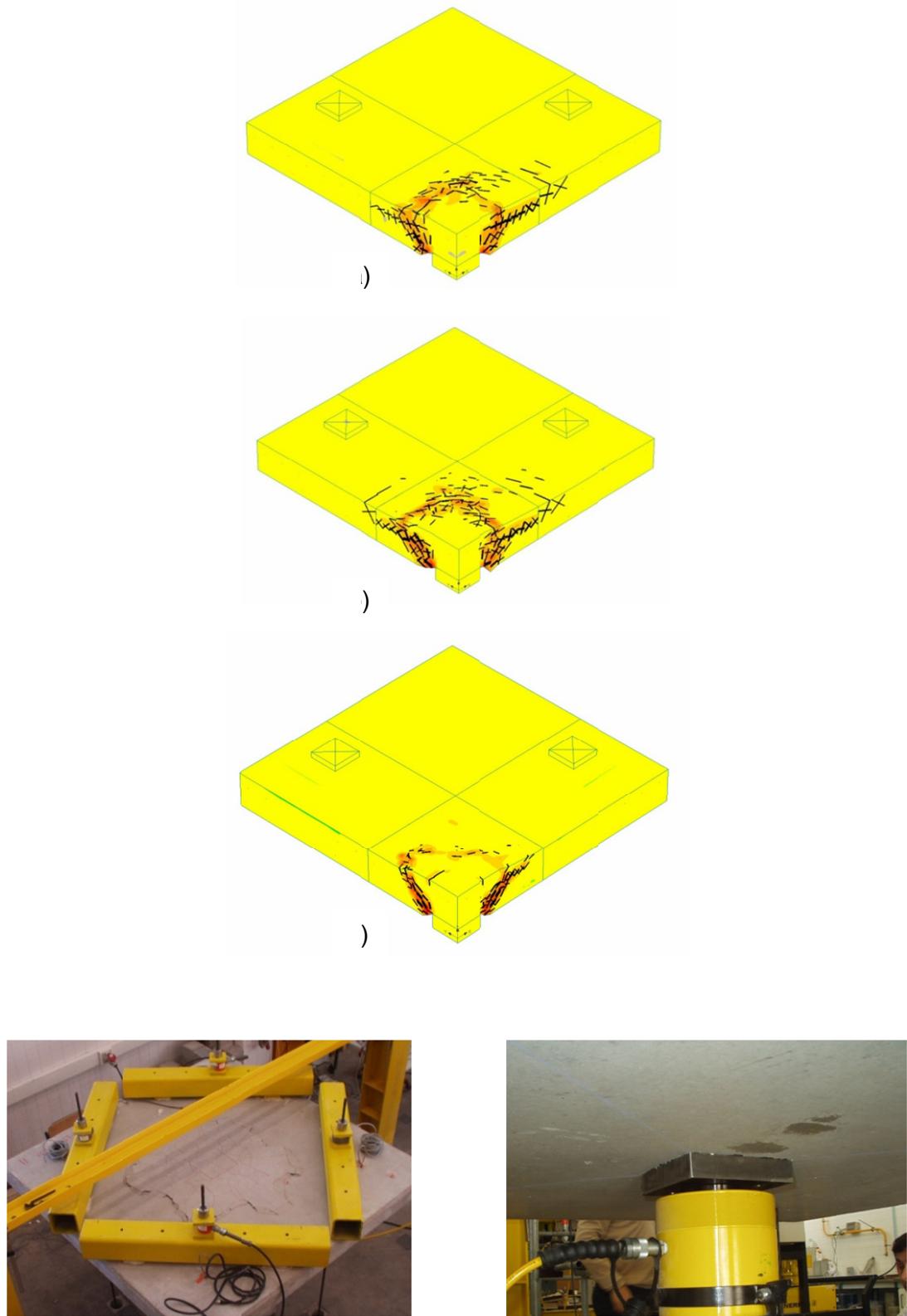
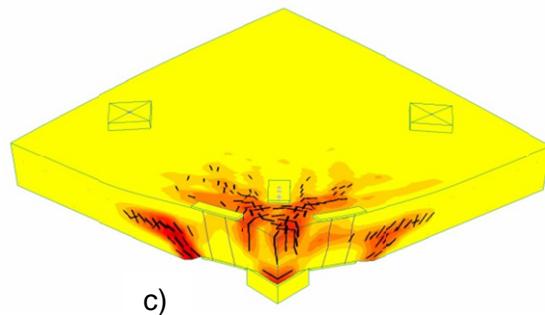
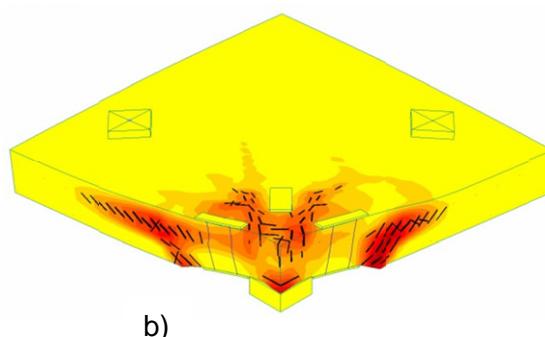
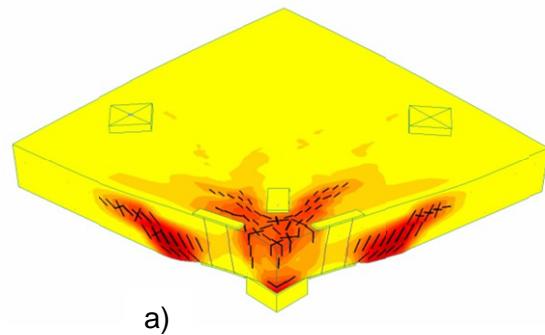


Figura 5-2 – Modos de rotura para os modelos ID1, a) ID1, b) ID1 RCM, c) ID1 RCM Refinado, d) Experimental [17]



)



Figura 5-3 – Modos de rotura para os modelos ID2, a) ID2, b) ID2 RCM, c) ID2 RCM Refinado, d) Experimental [17]

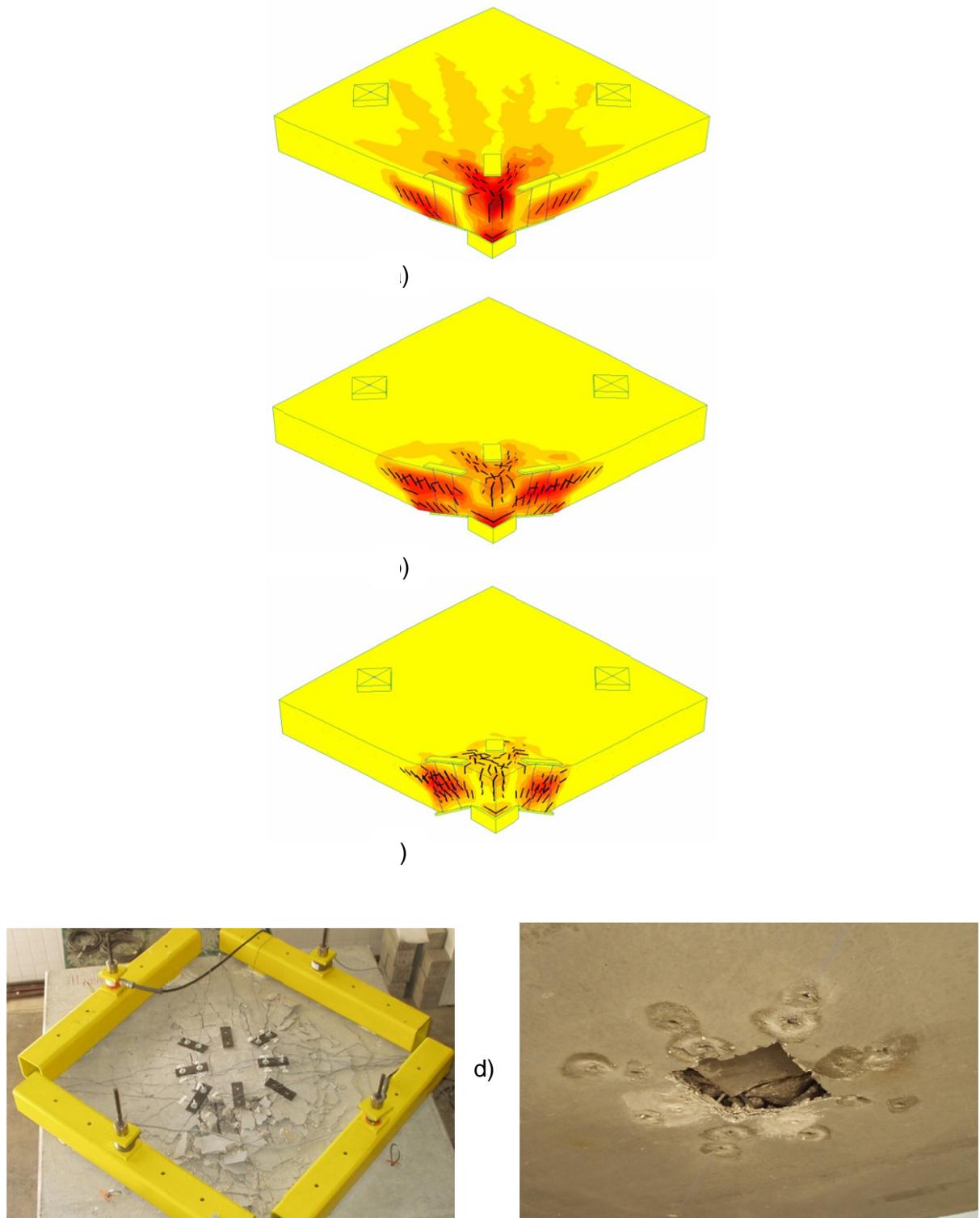


Figura 5-4 – Modos de rotura para os modelos ID3, a) ID3, b) ID3 RCM, c) ID3 RCM Refinado, d) Experimental [17]

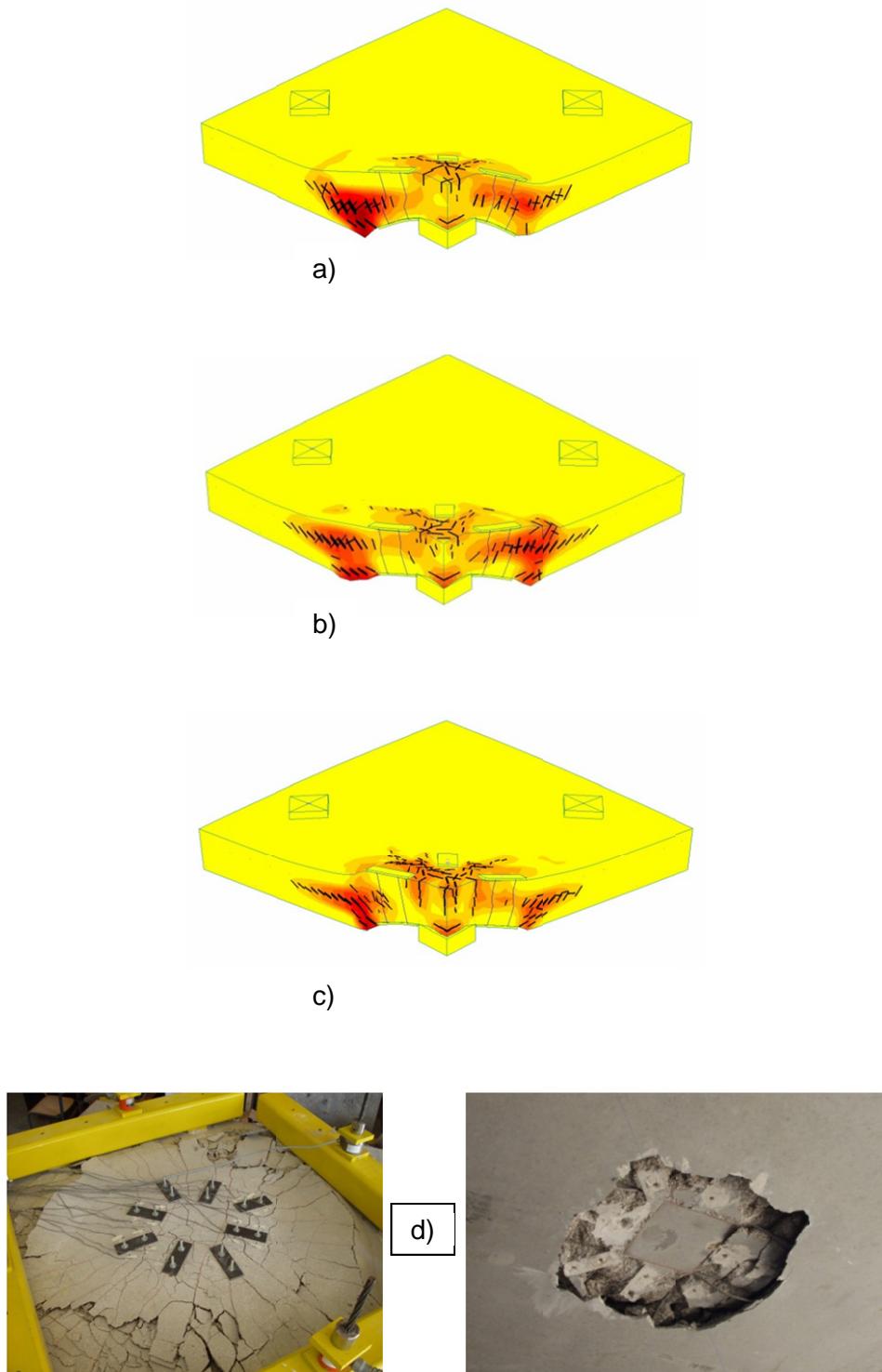


Figura 5-5 – Modos de rotura para os modelos ID4, a) ID4, b) ID4 RCM, c) ID4 RCM Refinado, d) Experimental [17]

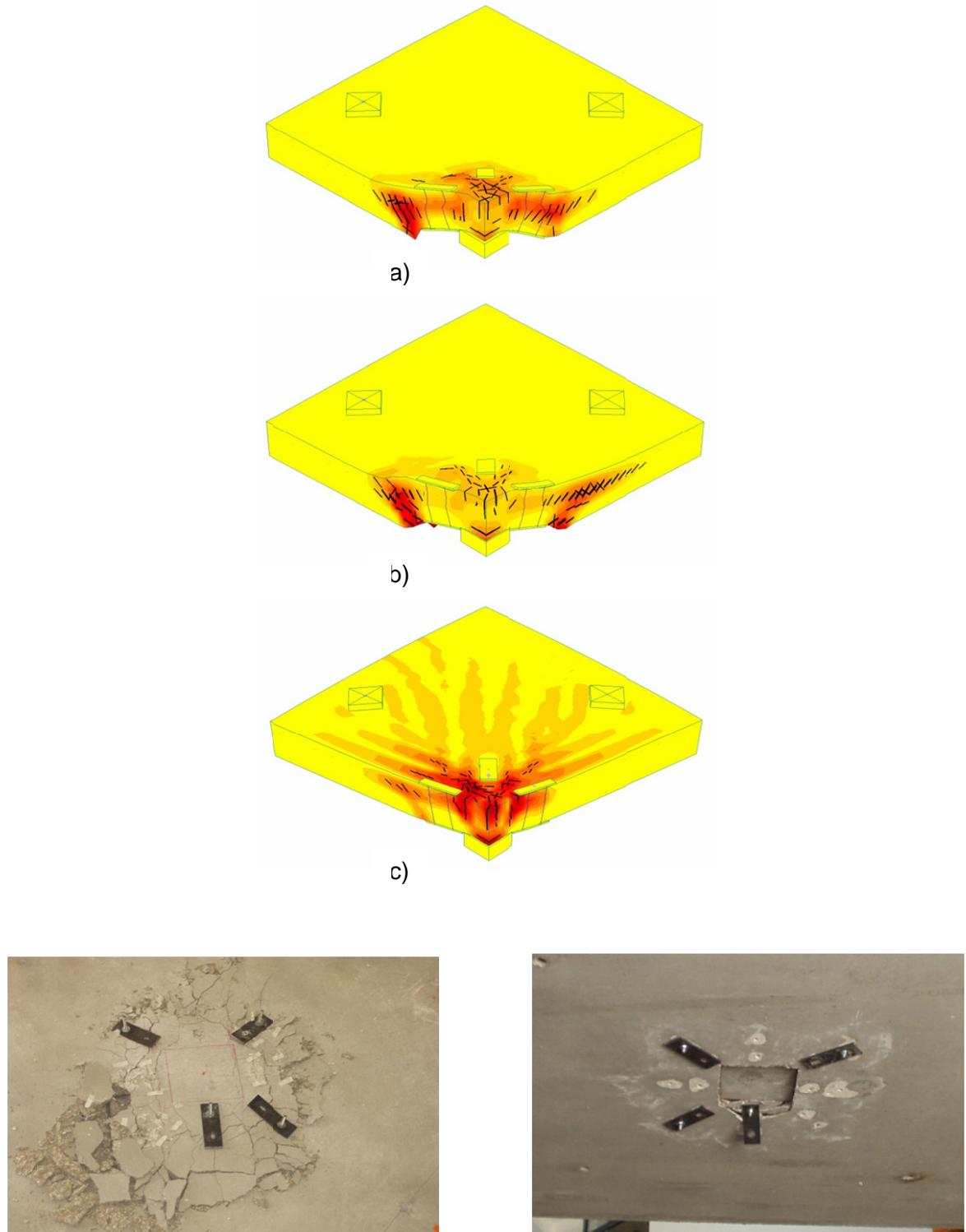


Figura 5-6 – Modos de rotura para os modelos ID5, a) ID5, b) ID5 RCM, c) ID5 RCM Refinado, d) Experimental [17]

## 5.2 Evolução dos deslocamentos verticais

O segundo termo de comparação dos modelos numéricos com os modelos laboratoriais corresponde à observação dos deslocamentos verticais em pontos-chave da laje. Para tal, foram comparados os deflectómetros do modelo numérico, com a média dos deflectómetros no modelo laboratorial. Tal deve-se ao facto de apenas ser simulado  $\frac{1}{4}$  da laje, pelo que só se obteve resultados correspondentes aos deflectómetros D3, D4 e D5, como já foi referido no ponto 4.2.3, na página 79.

### 5.2.1 Laje ID1

Os resultados obtidos na modelação numérica são de boa aproximação. As deformações previstas têm um erro mínimo em relação aos resultados experimentais.

Para todos os modelos numéricos o deflectómetro D4 apresenta uma fase elástica ligeiramente maior que a experimental, sendo que o troço seguinte apresenta uma rigidez semelhante à da laje experimental, como observado pela mesma inclinação dos gráficos, até cerca de 225 kN, após a cedência do varão do extensómetro 5-6.

O deflectómetro D5 apresenta também uma maior fase elástica que a obtida experimentalmente, seguida de um comportamento ligeiramente mais dúctil que o obtido experimentalmente, como se observa através da menor inclinação face ao experimental.

No início o modelo experimental é ligeiramente mais rígido que os modelos numéricos, mas à medida que a carga é incrementada a rigidez dos modelos numéricos passa a ser ligeiramente menor do que a do modelo experimental.

As diferenças entre os modelos são apenas visíveis perto da rotura, sendo que o segundo modelo, pelo facto de utilizar o RCM, obteve a rotura para uma menor carga, assim como menores deslocamentos.

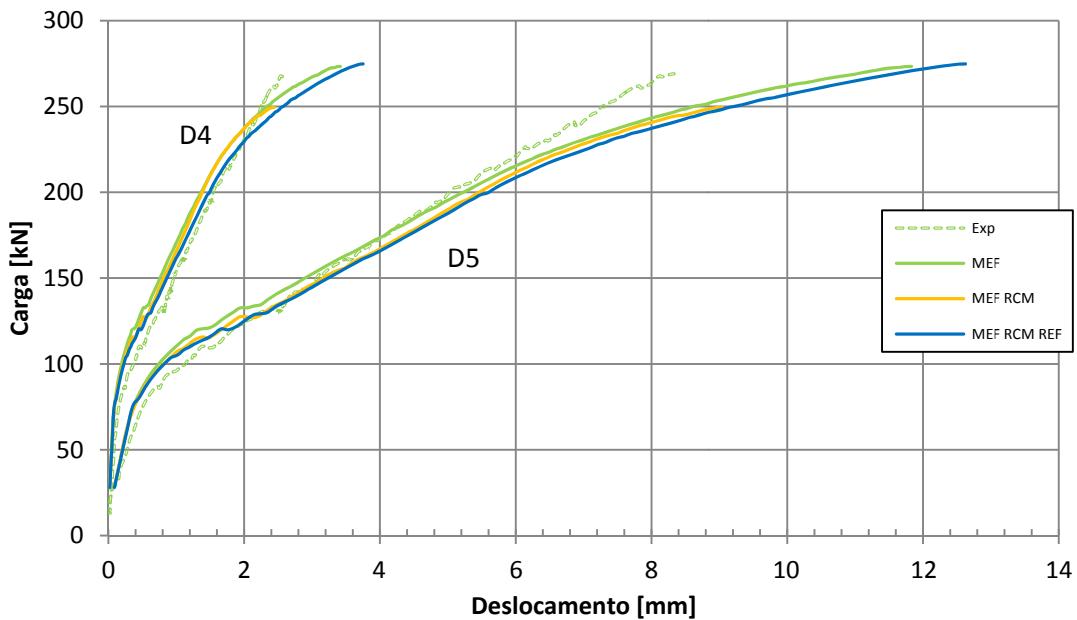


Figura 5-7 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID1

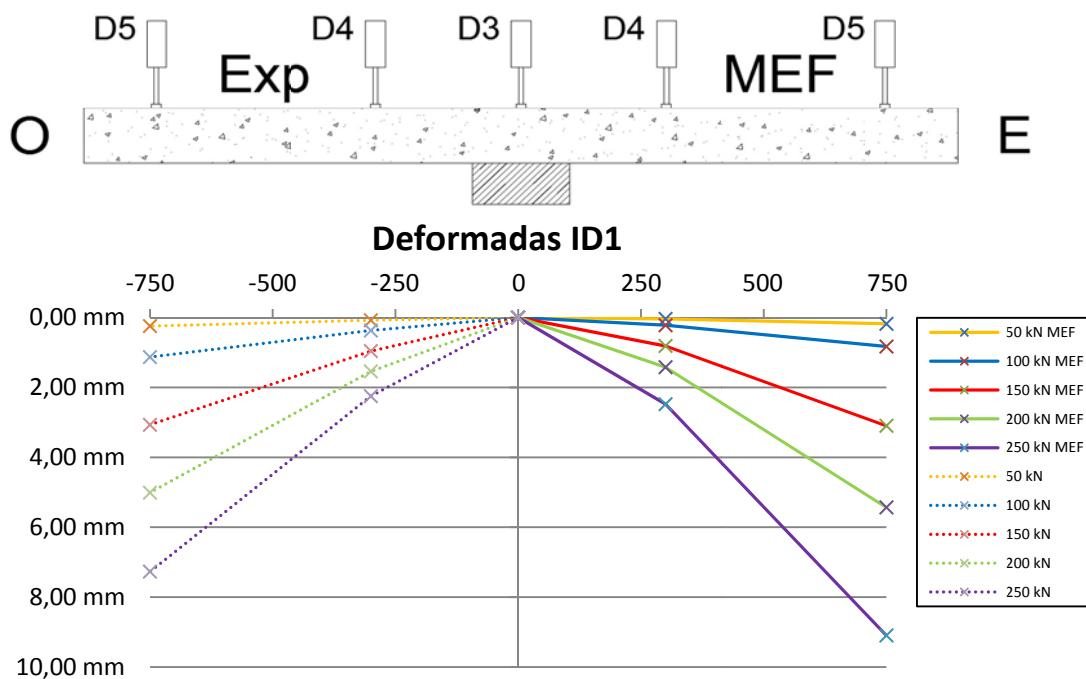


Figura 5-8 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID1

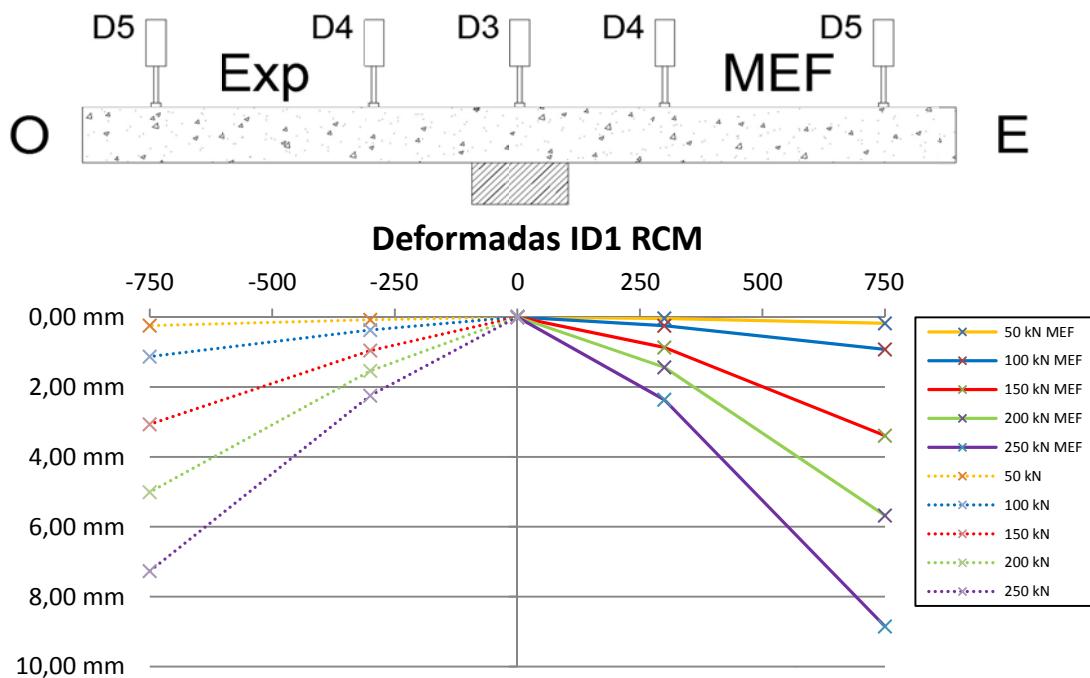


Figura 5-9 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID1 RCM

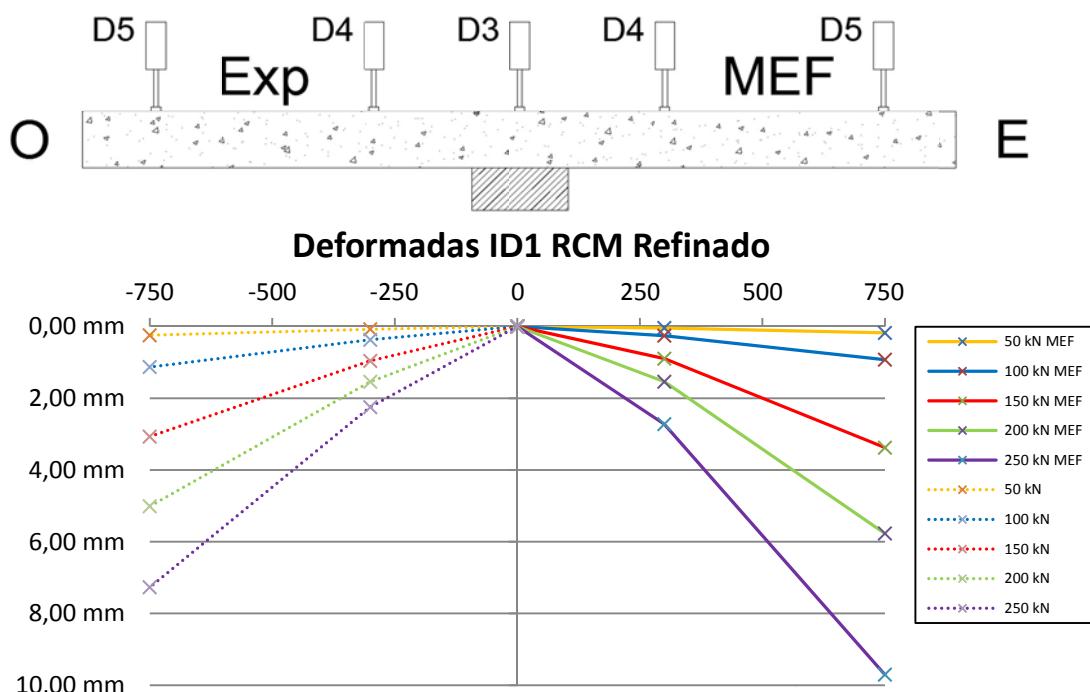


Figura 5-10 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID1 RCM Refinado

As deformadas mostram para diversos patamares de carga a semelhança entre os diversos modelos numéricos, assim como a boa aproximação ao modelo experimental.

É também possível observar as maiores diferenças perto da rotura para o patamar de carga de 250 kN.

### 5.2.2 Laje ID2

Do modelo ID2 ao modelo ID5, o procedimento de carregamento por duas fases implicou a presença de deslocamentos residuais na laje. Tal poderá ser observado nos resultados obtidos.

O modelo numérico, por apenas ter uma fase, não apresenta deslocamentos residuais.

#### 5.2.2.1 *Modelo ID2*

A introdução do reforço no modelo numérico muito pouco alterou a rigidez da laje, apenas levando a cargas de rotura mais altas e alterando o tipo de rotura, que passou a ocorrer pelo exterior do reforço.

Os modelos numéricos apresentam um troço elástico inicial mais rígido, e uma rápida perda de rigidez ao decorrer o carregamento, que leva a uma menor carga de rotura dos modelos numéricos. Essa perda pode ser justificada pela entrada em cedência das armaduras superiores, para valores de carga que correspondem aos pontos onde começa a decrescer a rigidez da laje.

A diferença obtida na introdução do RCM e da utilização conjunta do RCM e do refinamento da malha tem influência apenas nos resultados obtidos na rotura. A utilização do RCM reduziu a previsão da carga de rotura, tal como esperado. A utilização de uma malha mais refinada e o RCM aumentou a carga de rotura, obtendo o resultado mais elevado de todos os modelos.

Todos os modelos resultaram numa clara subestimação da carga de rotura e sobreestimação dos deslocamentos na rotura. Apesar de obterem uma boa aproximação até uma carga de cerca de 200kN, nível de carga que está próximo das cargas de serviço, a cedência dos varões mais interiores causa uma perda de rigidez que influencia a continuidade do carregamento. As deformadas também reflectem este facto, apresentando resultados superiores dos deslocamentos nos modelos numéricos para os mesmos patamares de carga superiores a 200 kN.

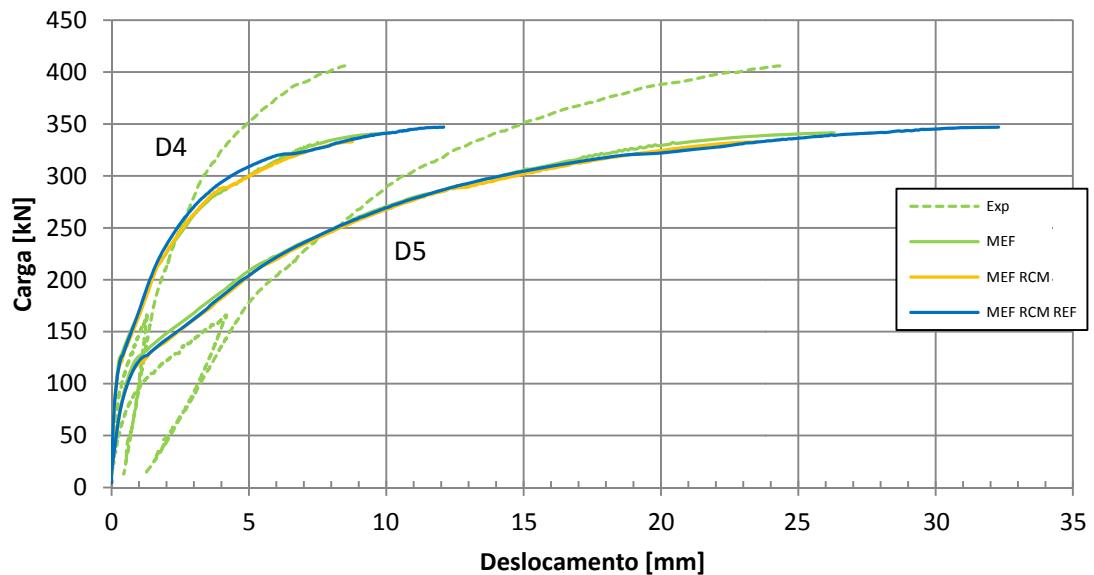


Figura 5-11 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID2

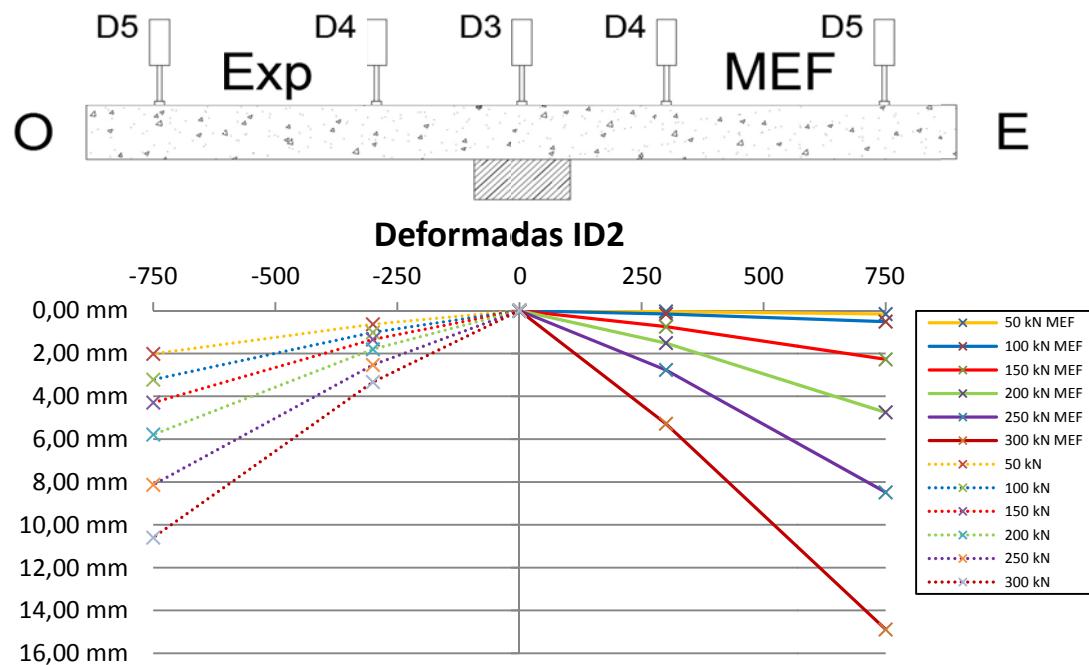


Figura 5-12 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID2

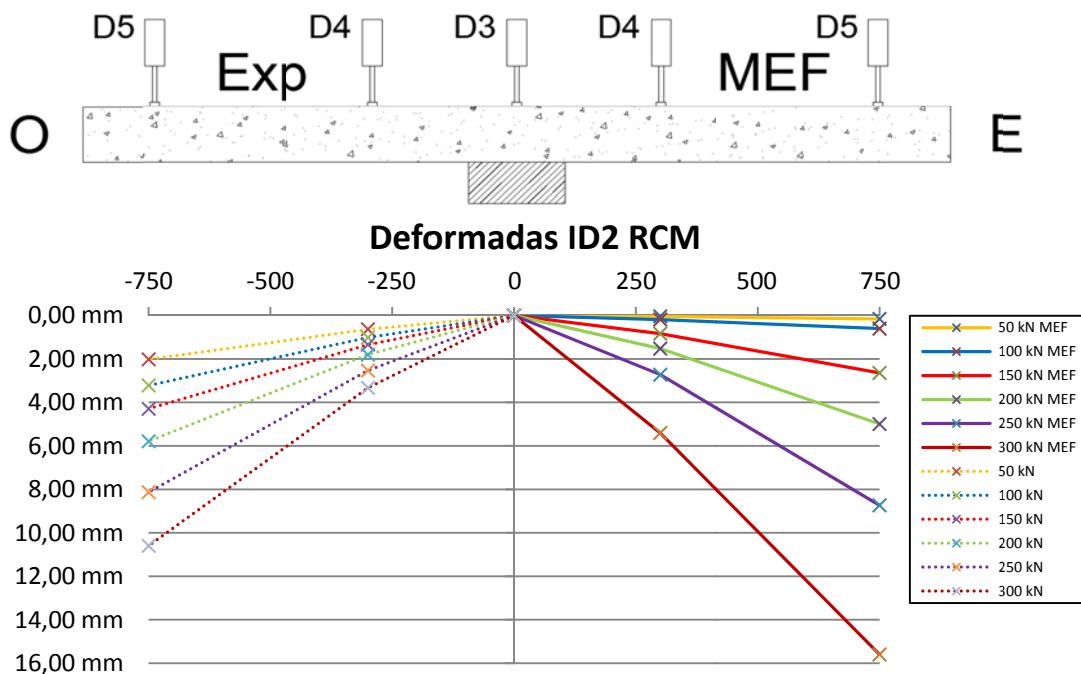


Figura 5-13 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID2 RCM

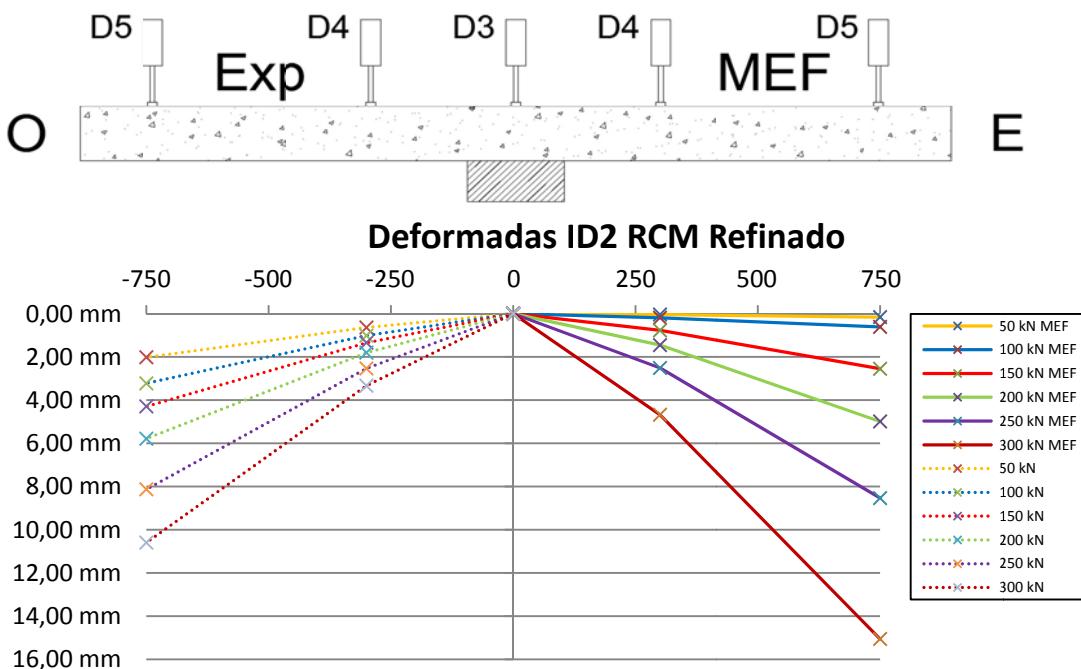


Figura 5-14 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID2 RCM Refinado

As deformadas apresentam os resultados obtidos de excessivos deslocamentos para as cargas mais elevadas. Demonstram também a semelhança de entre os modelos numéricos utilizados, assim como a pequena diferença para o patamar mais próximo da rotura.

### 5.2.3 Laje ID3

Até um valor de carregamento de cerca de 250 kN as previsões numéricas para os deslocamentos são bastante próximas das registadas experimentalmente. No entanto os deslocamentos obtidos na rotura nos modelos numéricos apresentam uma grande diferença em relação aos experimentais obtendo diferenças nos deslocamentos de mais de 100%, isto, apesar de a rotura ter ocorrido de forma semelhante à obtida experimentalmente, através do reforço e de as cargas de rotura serem semelhantes.

A introdução do RCM não trouxe alterações aos resultados obtidos face ao modelo inicial.

A introdução do RCM conjugada com o refinamento da malha piorou os resultados dos deslocamentos previstos na rotura, apresentando erros de mais de 100%, facto que é muito visível nas deformadas.

Tal pode ser comprovado para cada patamar de carga individualmente na figura abaixo.

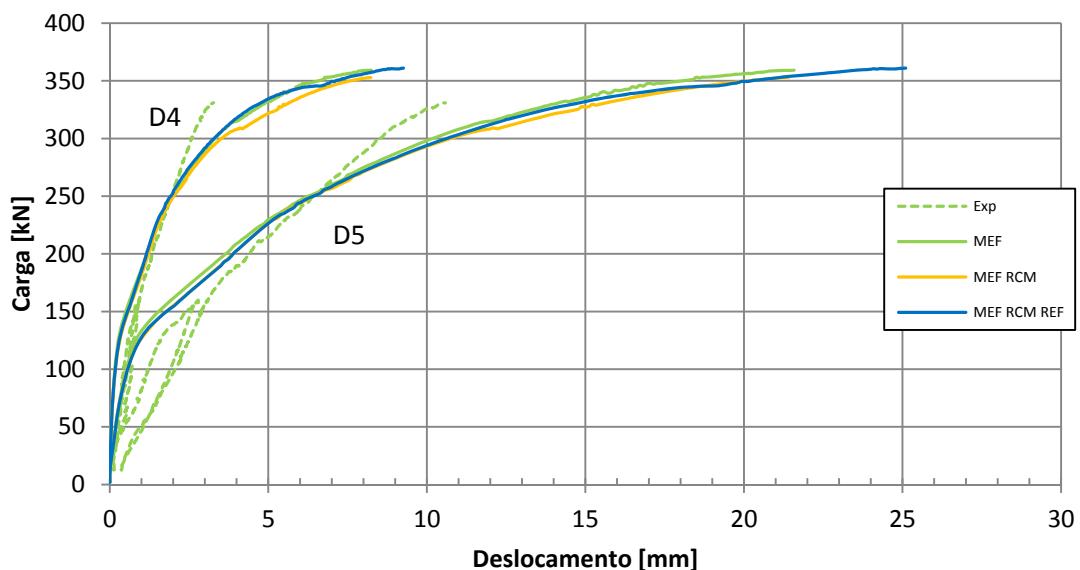


Figura 5-15 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID3

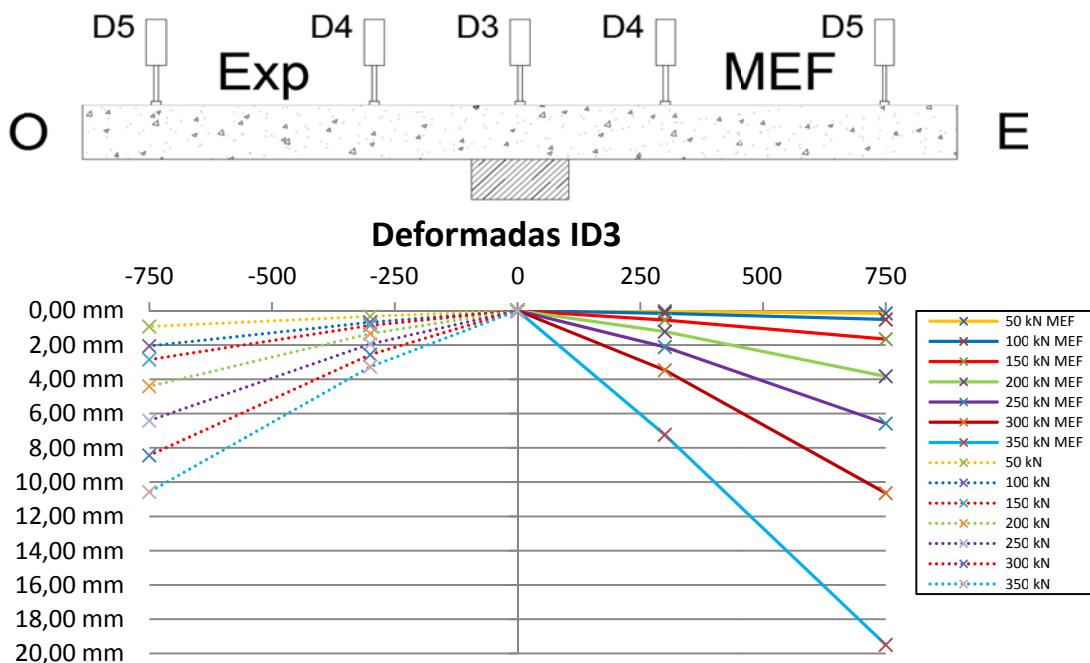


Figura 5-16 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID3

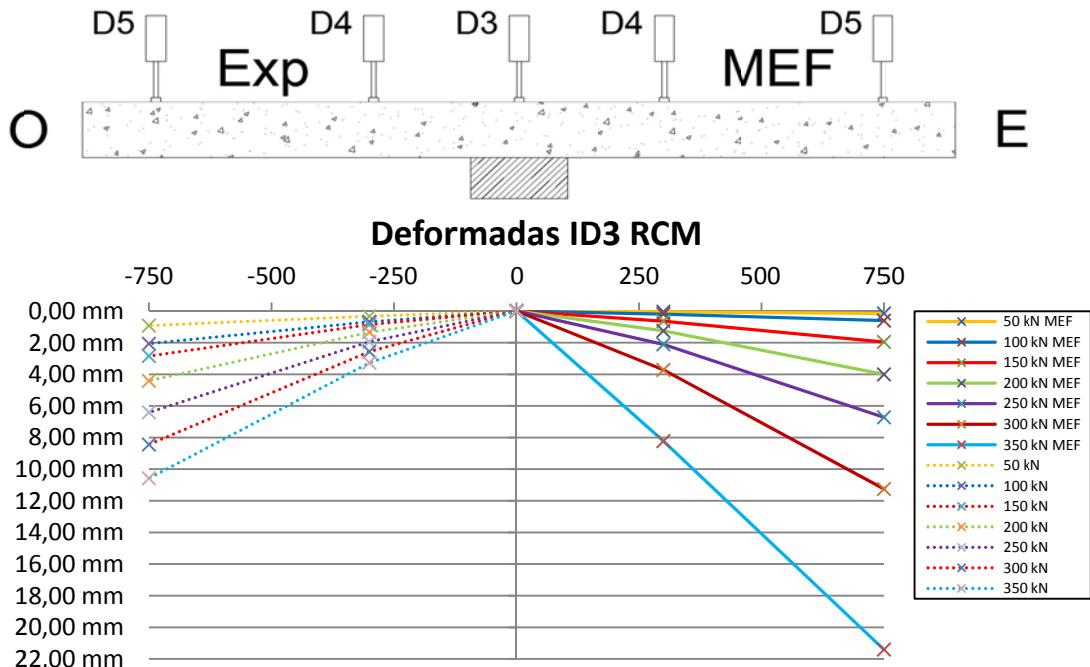


Figura 5-17 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID3 RCM

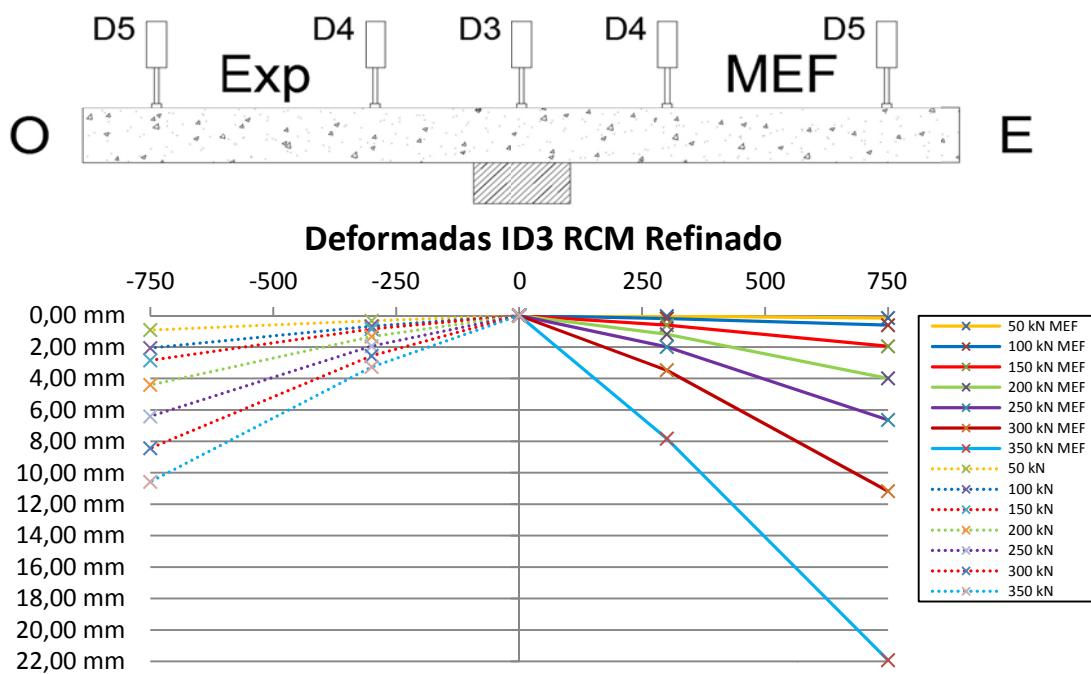


Figura 5-18 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID3 RCM Refinado

As deformadas ilustram perfeitamente a sobreestimação dos deslocamentos nos patamares mais próximos da rotura, para as cargas de 300 kN e 350 kN. No entanto para valores inferiores das cargas aplicadas as diferenças entre os resultados experimentais e os resultados numéricos não são grandes.

#### 5.2.4 Laje ID4

Para a laje ID4 foram obtidos modelos numéricos com melhores aproximações, subestimando os deslocamentos para cargas baixas devido a um troço elástico inicial mais longo, seguido de um troço com a rigidez semelhante à obtida experimentalmente até a cedência dos varões causar uma grande perda de rigidez, sobreestimando os deslocamentos para cargas próximas da rotura.

O modelo que utiliza o RCM obteve ao longo do carregamento ligeiras diferenças face ao modelo inicial, e obteve menores deslocamentos na rotura.

O modelo ao qual foi aplicado um maior refinamento da malha apresenta um comportamento semelhante ao modelo não refinado em que também foi utilizado o RCM, aumentando ligeiramente a carga e os deslocamentos previstos na rotura.

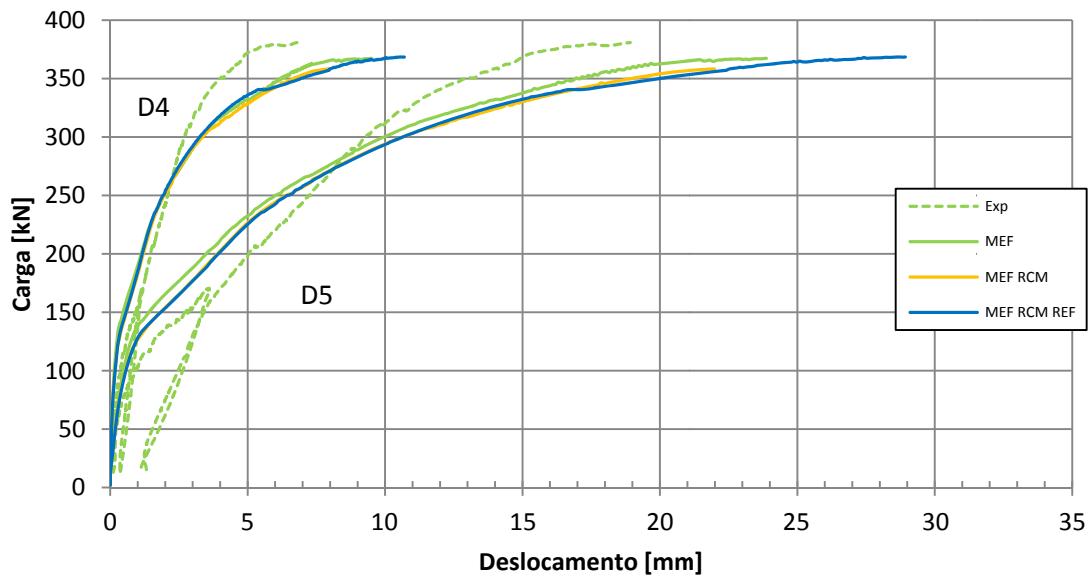


Figura 5-19 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID4

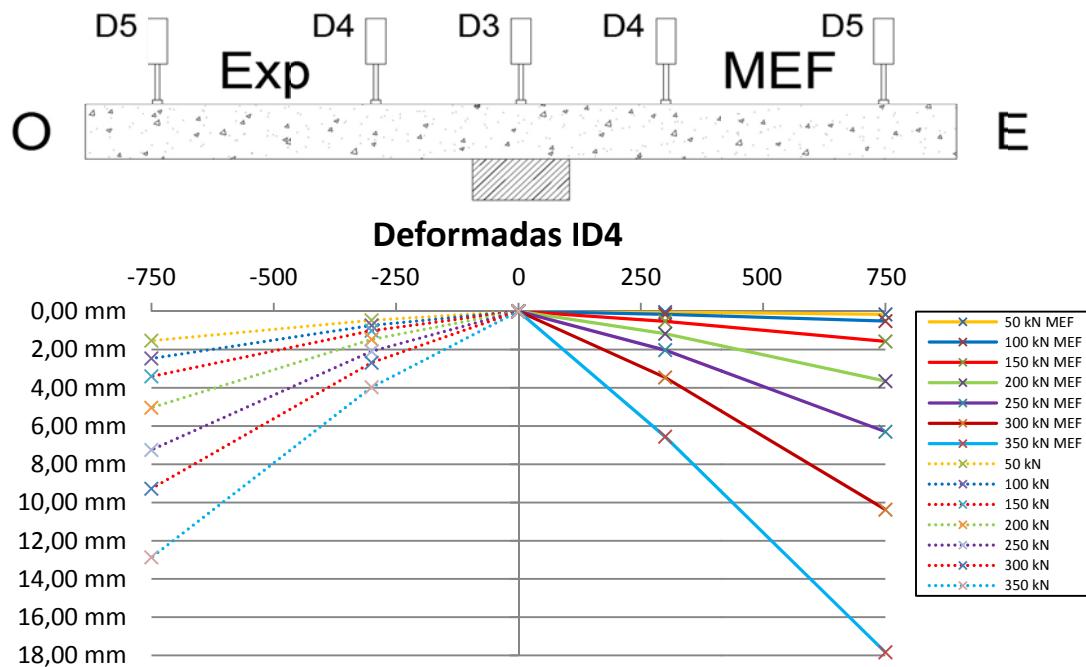


Figura 5-20 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID4

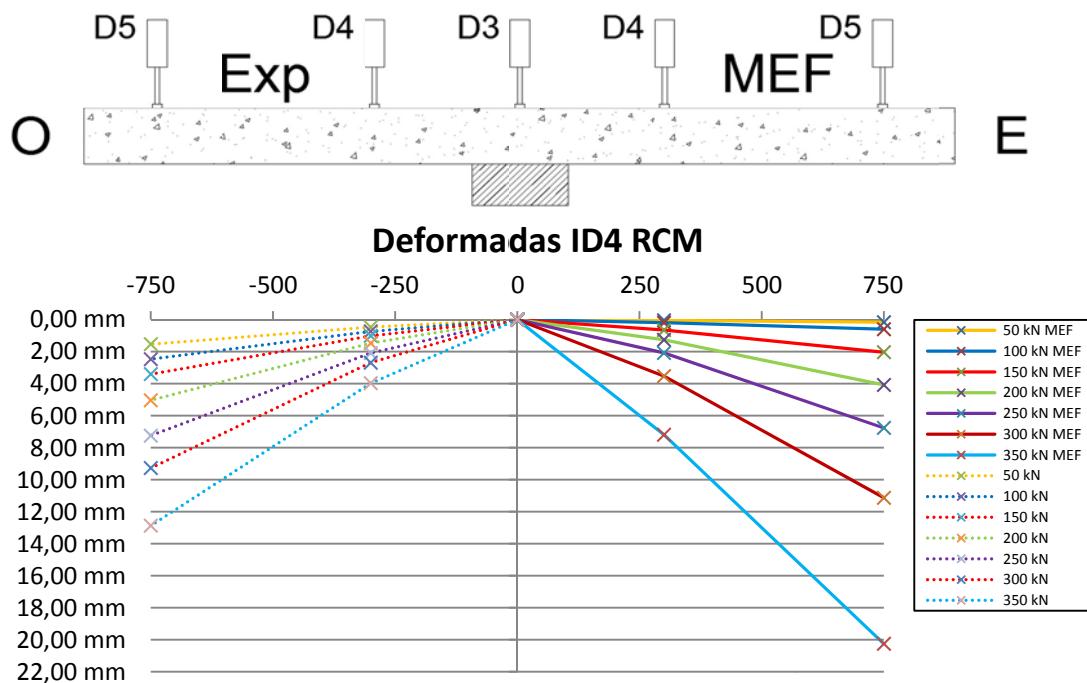


Figura 5-21 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID4 RCM

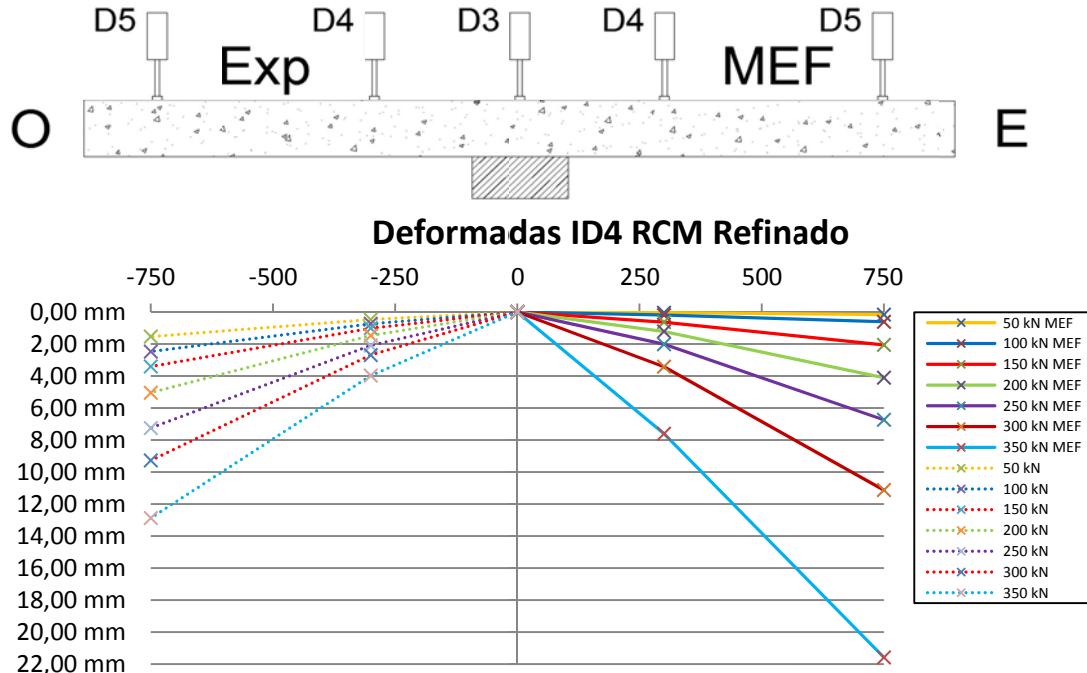


Figura 5-22 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID4 RCM Refinado

As deformadas apresentam de novo a subestimação para cargas inferiores a 275 kN e a sobreestimação para cargas superiores.

As deformadas dos modelos numéricos são semelhantes entre elas à excepção do último patamar de carga.

### 5.2.5 Laje ID5

Os modelos numéricos da laje ID5 foram os modelos que apresentaram melhores aproximações ao modelo experimental de todas as lajes reforçadas modeladas.

Os troços elásticos iniciais foram sobreestimados para todos os modelos numéricos, seguido de um troço de rigidez semelhante à obtida experimentalmente e de uma perda de rigidez que provocou a aproximação aos resultados experimentais. Esse facto resultou também numa boa aproximação na distribuição transversal para todos os patamares de carga, excepto nos patamares iniciais, já justificado pelo facto de os valores do ensaio experimental se referirem apenas à segunda fase do carregamento.

A utilização do RCM resultou na melhor aproximação obtida, com os menores erros para cargas próximas da rotura.

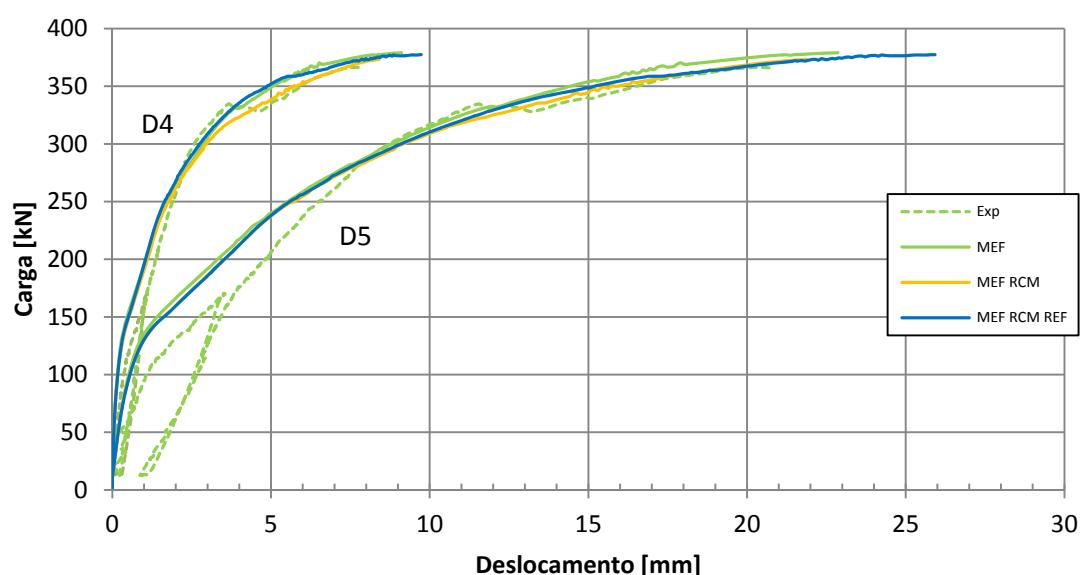


Figura 5-23 – Evolução dos deslocamentos com a carga aplicada nos modelos ID4

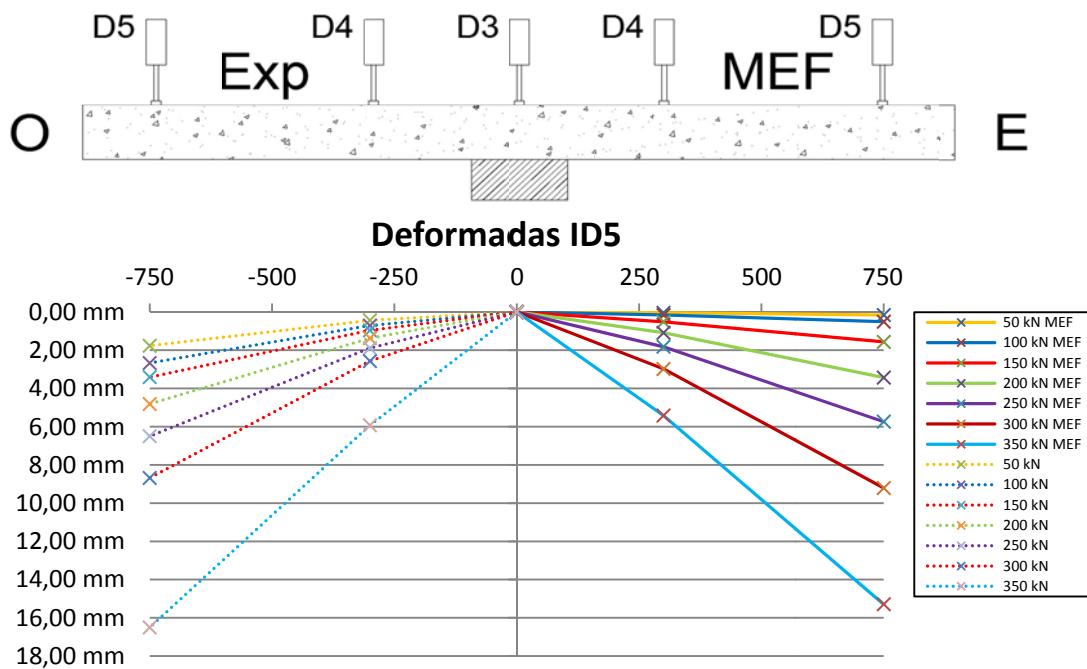


Figura 5-24 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID5

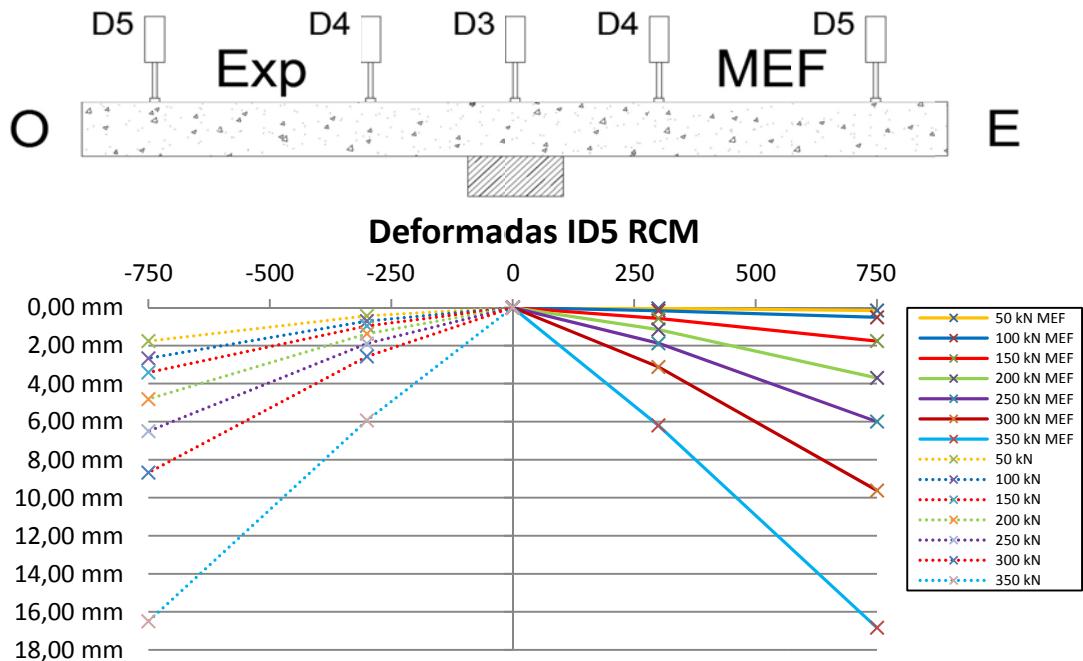


Figura 5-25 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID5 RCM

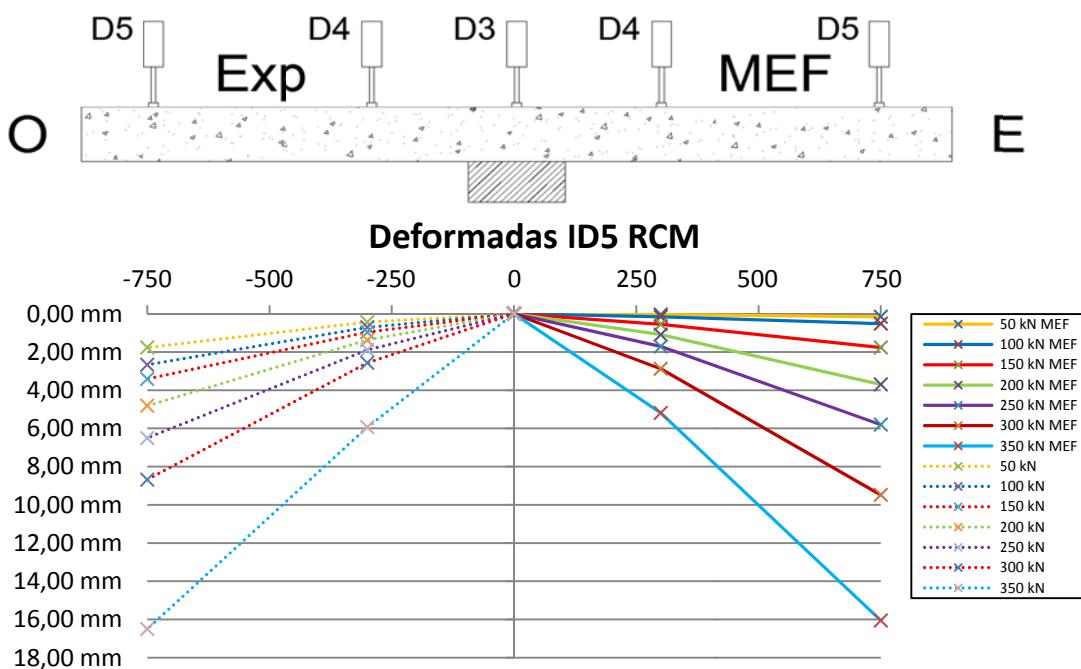


Figura 5-26 – Deformadas E-O para diversos patamares de carga no modelo ID5 RCM Refinado

As deformadas apresentam a boa aproximação destes modelos aos resultados experimentais.

### 5.2.6 Observações

Pela observação da evolução dos deflectómetros ao longo do carregamento, é possível observar que todos os modelos numéricos evidenciam comportamentos mais dúcteis que os experimentais.

Observa-se também que as lajes dos ensaios experimentais apresentam pequenas alterações na rigidez, sendo possível observar um modelo com comportamento ligeiramente distinto dos outros, o modelo ID2. Este modelo também obteve um comportamento distinto na modelação numérica, embora muito provavelmente não pelas mesmas razões.

O módulo de elasticidade do betão influencia bastante a rigidez no modelo numérico, criando diferenças na rigidez entre todos os modelos, sendo a possível justificação do comportamento do modelo numérico ID2, cujos ensaios demonstraram um betão de menor resistência, levando a um menor módulo de elasticidade. Este factor tem uma influência maior no modelo numérico do que nos ensaios experimentais.

Os restantes modelos experimentais apresentam entre si pequenas diferenças na rigidez, facilmente justificáveis pela pequena diferença da resistência dos betões, assim como variações na resistência dentro do mesmo modelo, tanto dos betões como material heterogéneo, como das armaduras utilizadas. Pode também haver influência originada nas diferentes alturas úteis medidas em cada modelo individualmente.

Os modelos numéricos não apresentaram alteração na rigidez face à alteração dos parâmetros do refinamento, mas apresentaram uma alteração quase imperceptível da rigidez aquando da utilização do RCM ou o FCM, sendo que a utilização do RCM obtém uma rigidez ligeiramente menor.

### 5.3 Evolução das extensões na armadura superior

Para acompanhar o comportamento das armaduras ao longo do carregamento, foram colocados 3 extensómetros em varões da armadura superior com maior altura útil, instrumentados alternadamente, como demonstrado Figura 5-27.

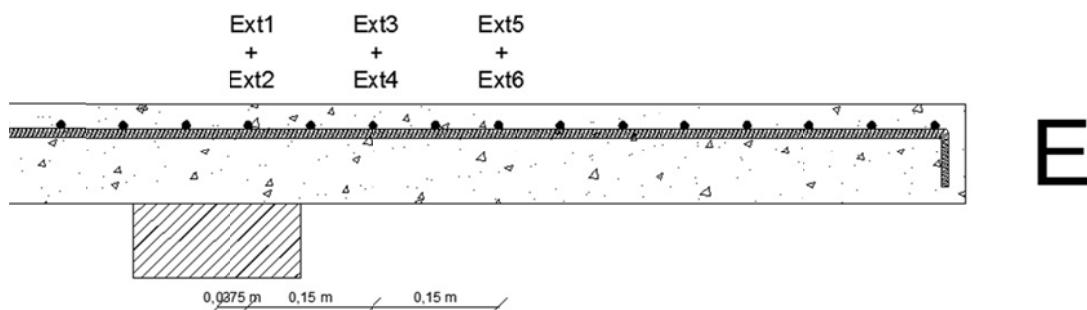


Figura 5-27 – Posição dos extensómetros

Para cada laje, foram analisados os resultados dos extensómetros, e sua comparação com os resultados experimentais.

Para efeitos de análise do estado da armadura, foi considerada uma extensão de cedência de 5,5‰, obtidos dos ensaios do material, através da tensão de cedência a correspondente extensão na armadura. Utilizando a escala dos gráficos, a extensão de cedência corresponderá a  $5500 \cdot 10^{-6}$  para os modelos experimentais, e  $2100 \cdot 10^{-6}$  para os modelos numéricos, pelo facto de se utilizar modelos simplificados para o comportamento das armaduras.

### 5.3.1 Laje ID1

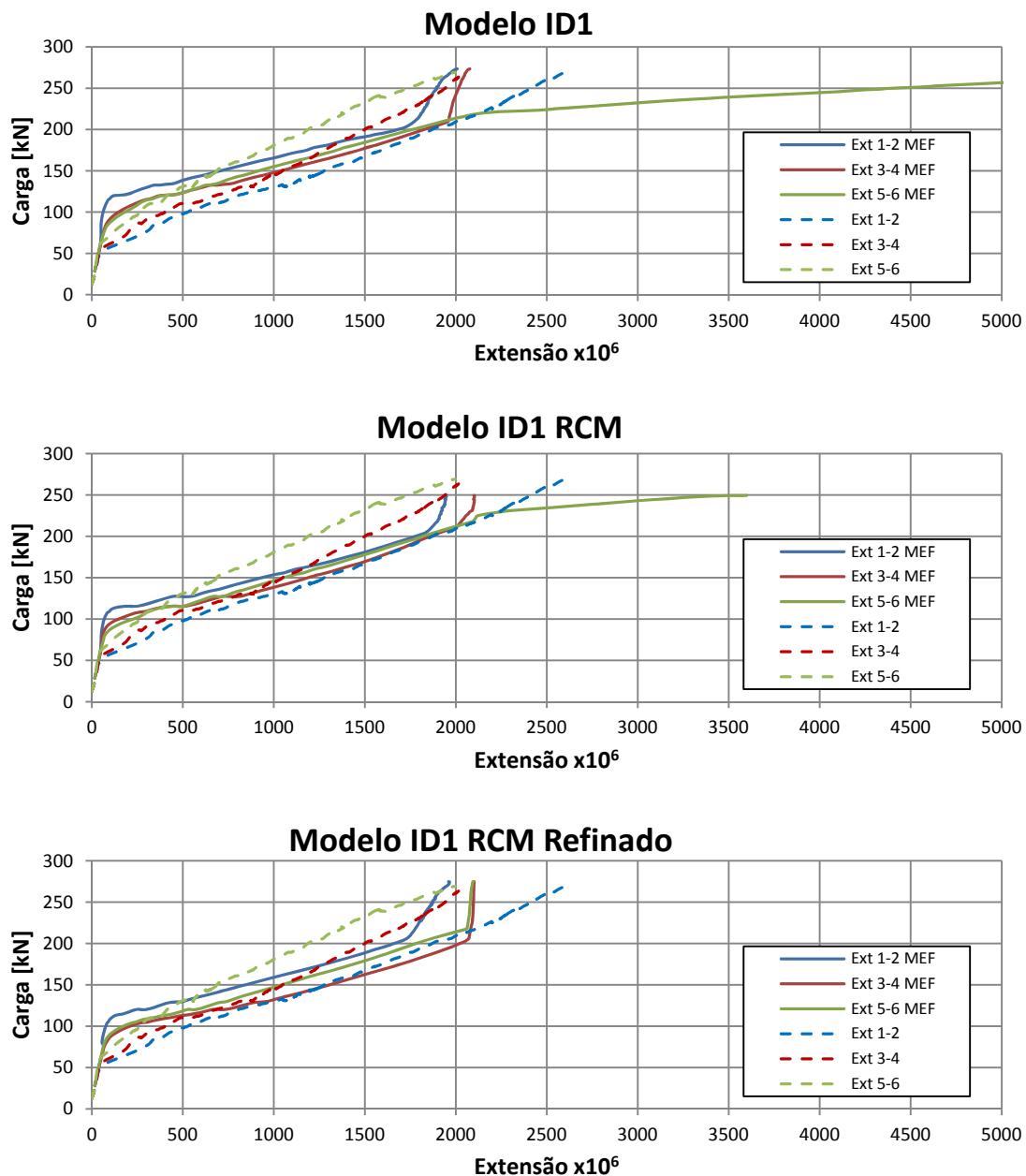


Figura 5-28 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID1 e comparação com modelo experimental

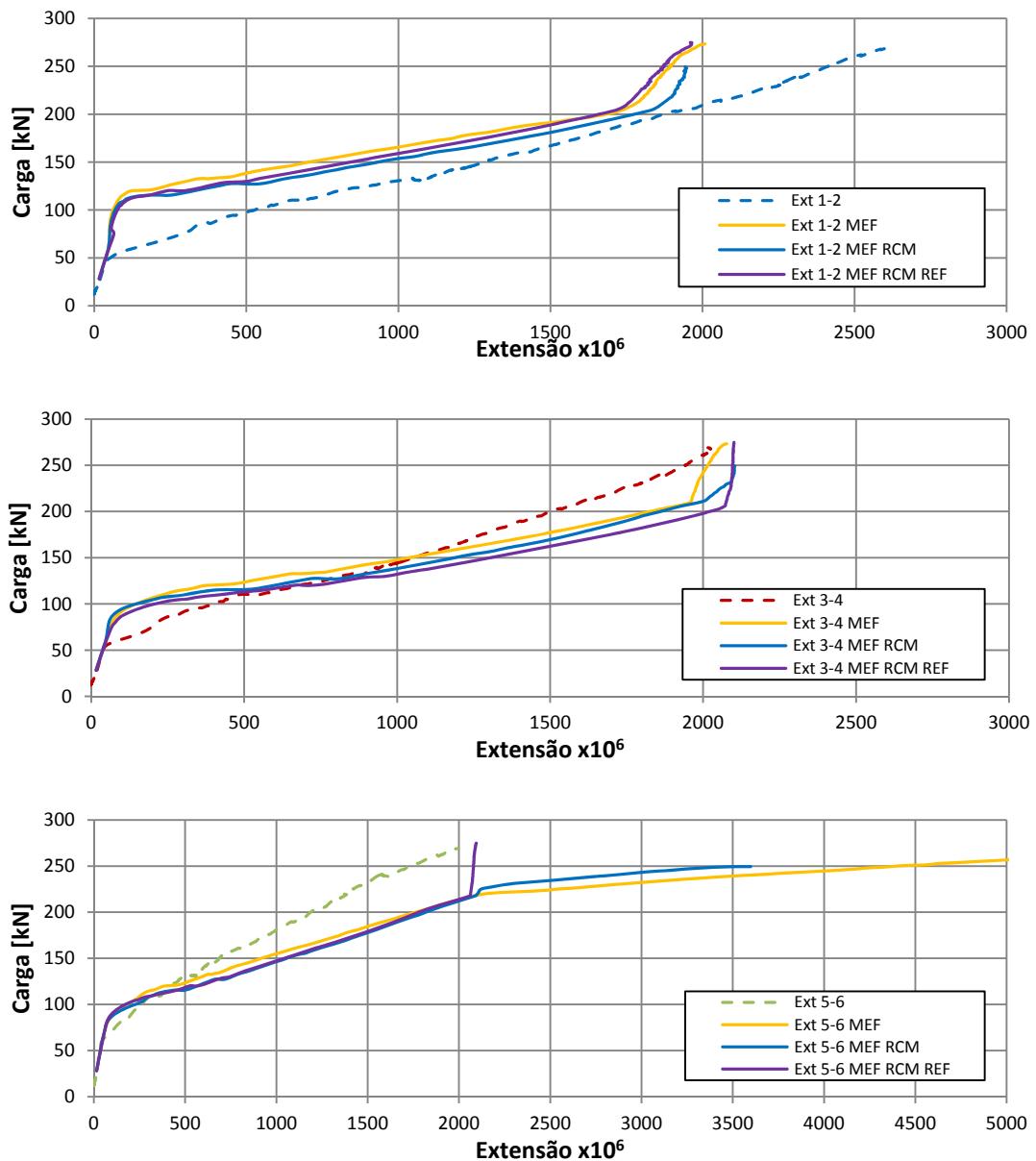


Figura 5-29 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID1 e comparação com modelo experimental, por extensómetro

Através dos resultados obtidos para este primeiro modelo, verifica-se uma boa aproximação para os resultados das extensões nos dois varões mais perto do centro do pilar, correspondendo aos extensómetros 1+2 e 3+4, e uma aproximação aceitável para as extensões no varão mais exterior, correspondendo aos extensómetros 5+6. Apesar de os modelos numéricos apresentarem um troço elástico inicial mais longo para todos os extensómetros, a evolução das extensões com o carregamento posteriormente à fase elástica não é tão rígida, aproximando de novo os resultados numéricos aos resultados experimentais. O extensómetro 5+6 obteve resultados mais díspares, apresentando para

todos os modelos resultados iniciais de grande aproximação, começando a obter maiores erros com o aumento do carregamento, até ser atingida a cedência do varão para dois dos modelos utilizados. A entrada em cedência ocorreu para valores de extensão na ordem de  $2100 \times 10^{-6}$ , e para uma carga de 225 kN, começando os valores da extensão a aumentar muito com pequenos incrementos de carga, como demonstrado pelo patamar quase horizontal no gráfico. O modelo refinado, com a utilização do RCM diferiu dos restantes ao não prever a cedência do varão. Este último modelo obteve resultados das extensões na rotura mais próximos dos obtidos experimentalmente.

Não é possível apontar o modelo que melhor se aproximou pelo facto de que cada um dos modelos aproximou melhor os resultados de um dos extensómetros monitorizados, mas de uma forma genérica as aproximações entre os modelos numéricos e o experimental foram boas.

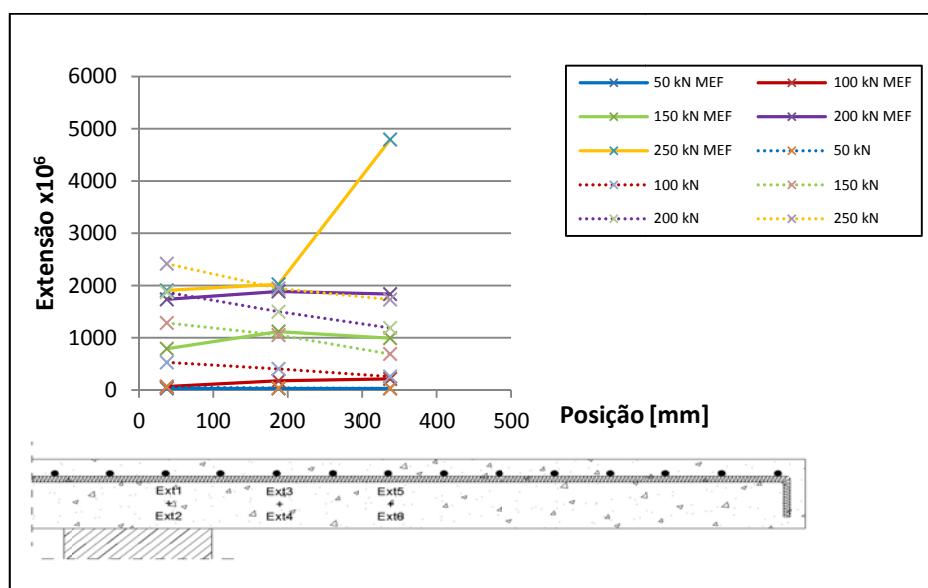


Figura 5-30 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID1 (corte E-O)

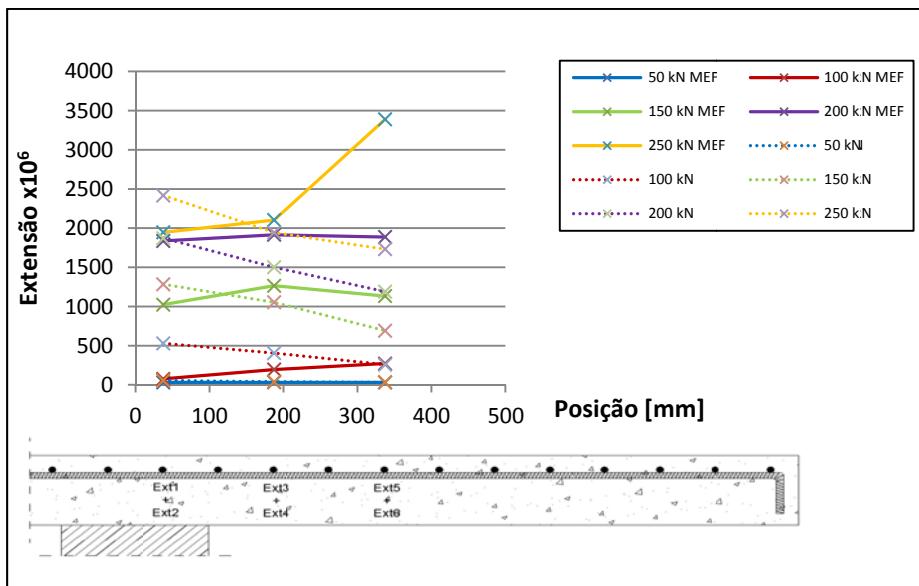


Figura 5-31 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID1 RCM (corte E-O)

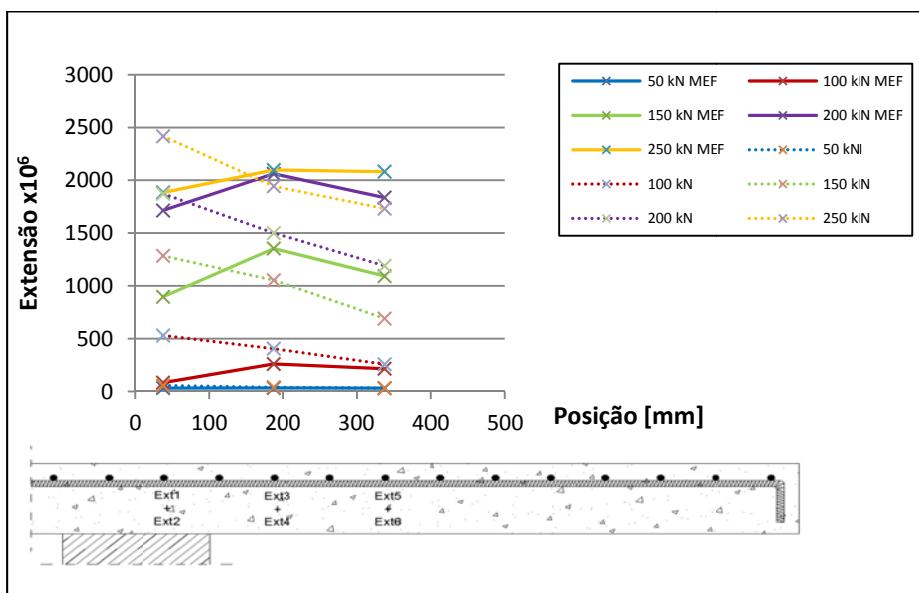


Figura 5-32 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID1 RCM Refinado (corte E-O)

Analisando a distribuição transversal das extensões observam-se as diferenças obtidas para diferentes patamares de carga, assim como a grande diferença obtida no extensómetro 5+6, após a cedência do varão, para os dois primeiros modelos. Nos patamares de carga mais elevados, observou-se em todos os modelos a subestimação das extensões no varão mais interior, assim como a sobreestimação dos valores das extensões no varão mais exterior. A sobreestimação das extensões no varão exterior é menor no modelo que utiliza o RCM e o maior refinamento da malha pelo facto de não ter sido previsto a cedência do varão.

### 5.3.2 Laje ID2

Do modelo ID2 ao modelo ID5, como já referido anteriormente, os ensaios experimentais foram efectuados em 2 fases, a primeira para simular a fendilhação da laje, que justificaria a intervenção de reforço e a segunda fase, após reforço, para verificar o comportamento até à rotura. Este procedimento implicou, ao finalizar a primeira fase, a presença de extensões residuais nas armaduras, como se poderá observar nos resultados obtidos.

No modelo numérico só foi considerada uma fase, não havendo extensões residuais.

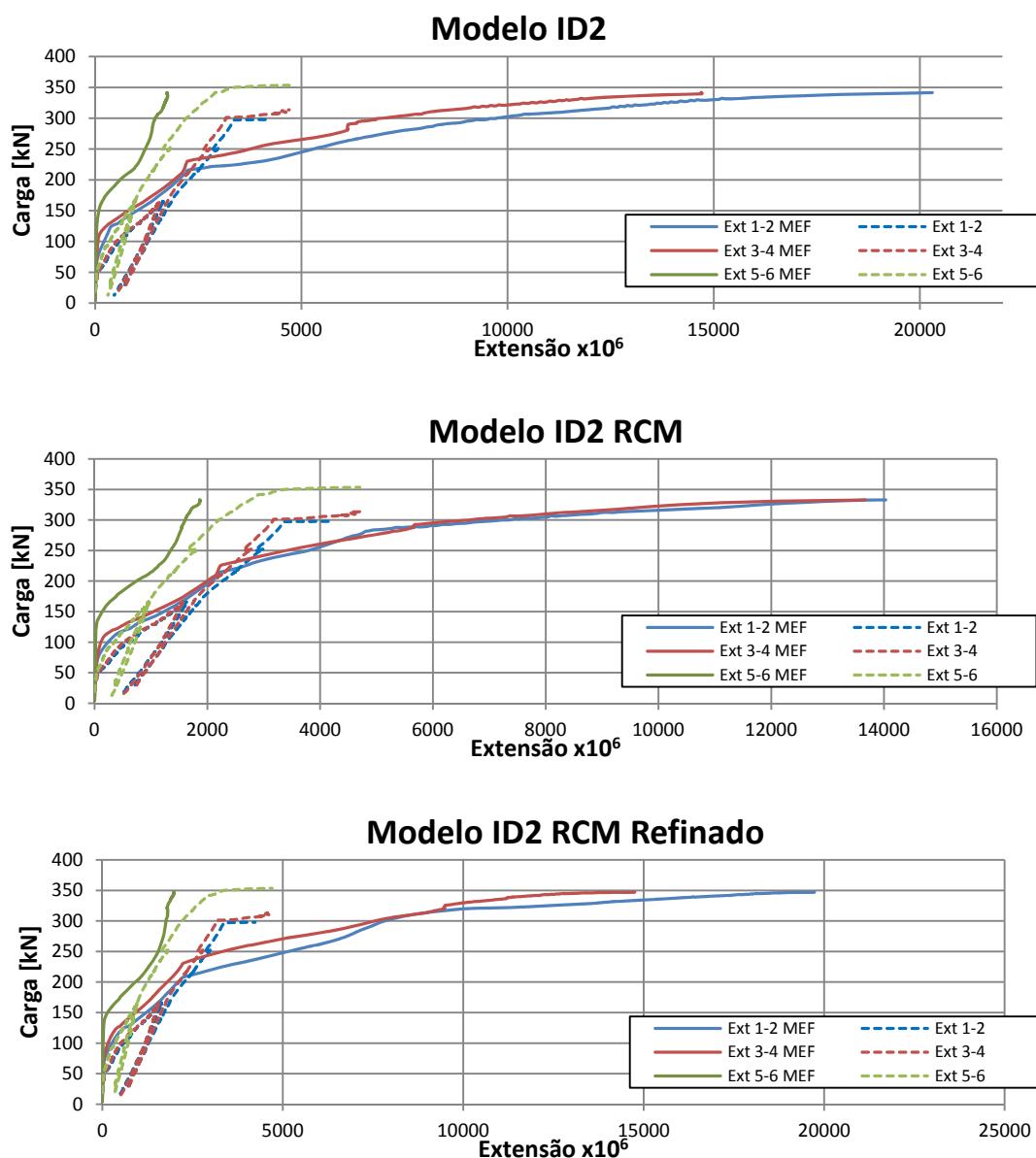


Figura 5-33 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID2 e comparação com modelo experimental

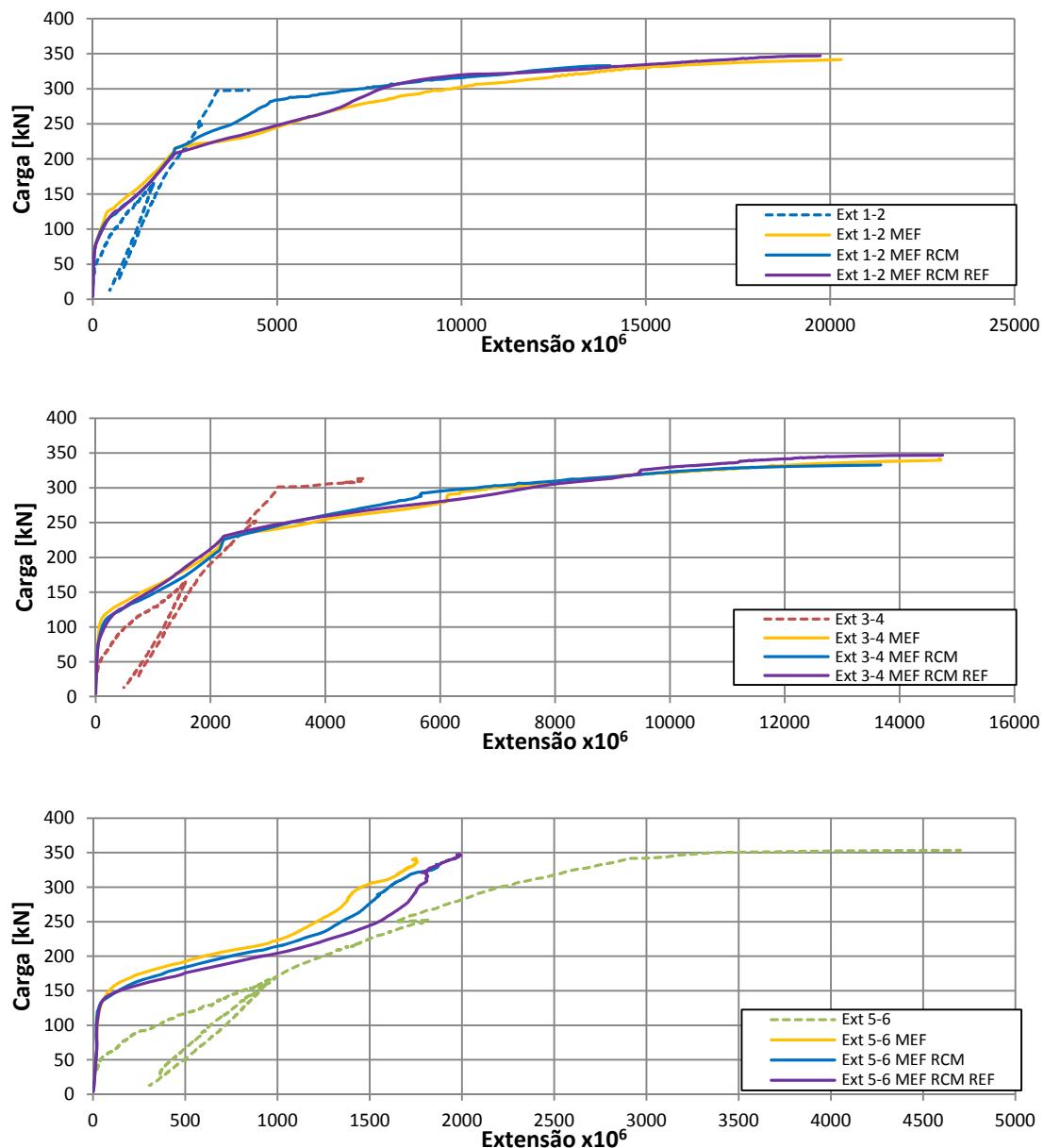


Figura 5-34 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID2 e comparação com modelo experimental, por extensómetro

Os modelos numéricos da laje ID2 apresentam boas aproximações do troço elástico inicial para o extensómetro 1-2, e um troço elástico exagerado para os extensómetros 3-4 e 5-6 para qualquer um dos modelos criados. Os modelos conseguiram prever a cedência dos dois varões mais interiores, correspondendo aos extensómetros 1-2 e 3-4, apesar de o tenham previsto para cargas bastante inferiores às experimentais. Todos os modelos numéricos apresentaram cargas de cedência na ordem dos 225 kN, quando a carga de cedência obtida dos ensaios experimentais era cerca de 300 kN. Nenhum modelo conseguiu prever a cedência do varão mais exterior, correspondente ao extensómetro 5-6, apesar de

ter atingido extensões próximas do valor de cedência de  $2100 \times 10^{-6}$ . Todos os modelos obtiveram resultados semelhantes, havendo apenas ligeiras diferenças no extensómetro 1-2, onde a introdução do coeficiente para o RCM obteve extensões na rotura bastante menores que os restantes, e no extensómetro 5-6, onde há ligeiras variações nos resultados obtidos. Verifica-se no entanto uma melhor aproximação por parte do modelo que utiliza o coeficiente de 0,5 e o refinamento da malha.

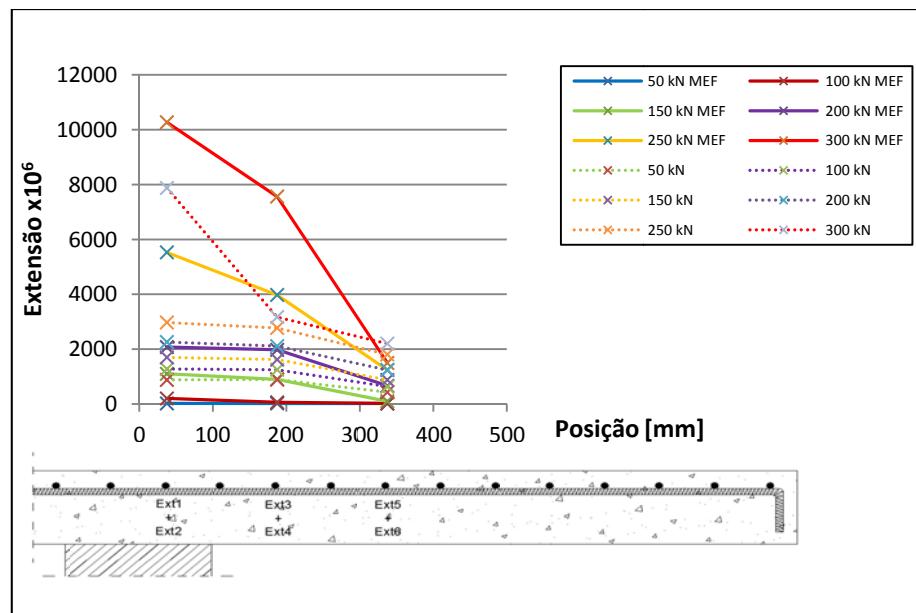


Figura 5-35 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID2 (corte E-O)

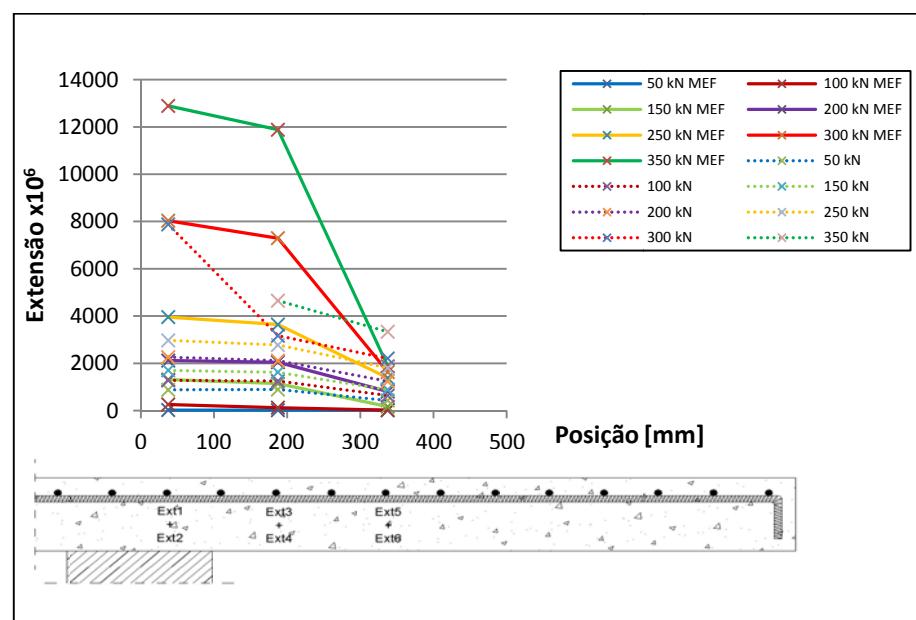


Figura 5-36 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID2 RCM (corte E-O)

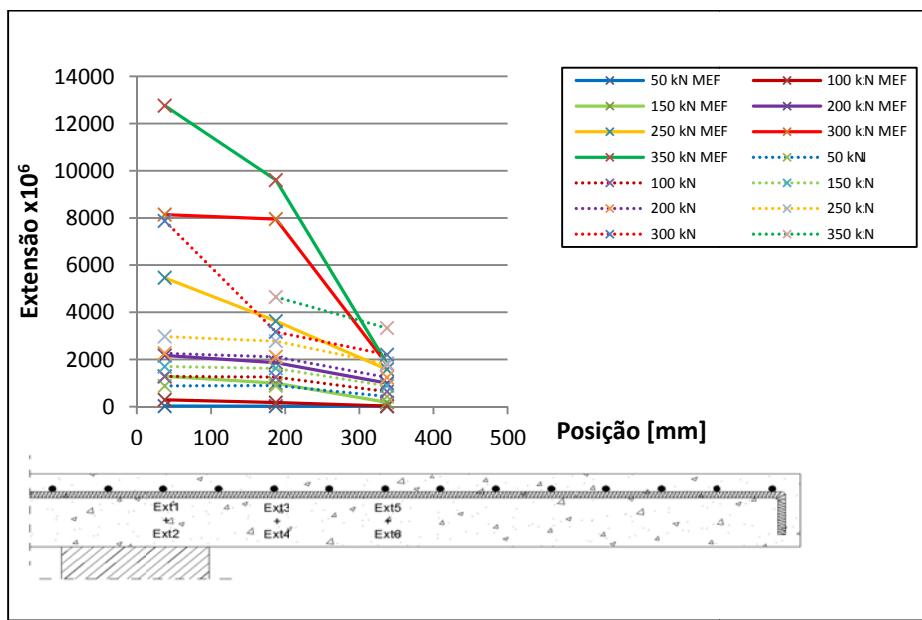


Figura 5-37 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID2 RCM Refinado (corte E-O)

A distribuição transversal de extensões nas armaduras mostra a correcta previsão de maiores extensões nos varões mais interiores da laje, mas mostra também a clara sobreestimação das extensões para cada patamar de carga superior a 250 kN, após a cedência dos varões interiores.

### 5.3.3 Laje ID3

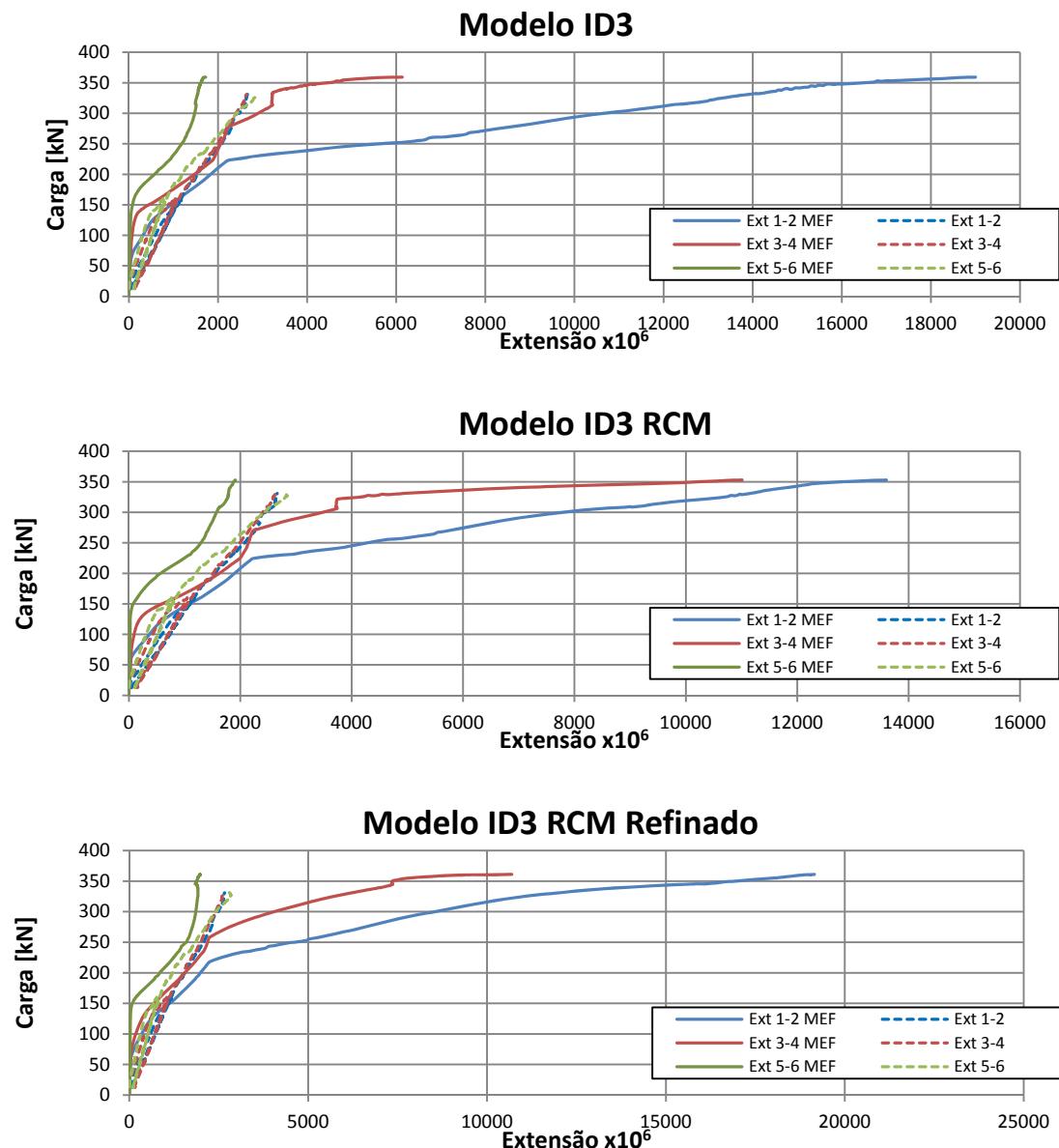


Figura 5-38 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID3 e comparação com modelo experimental

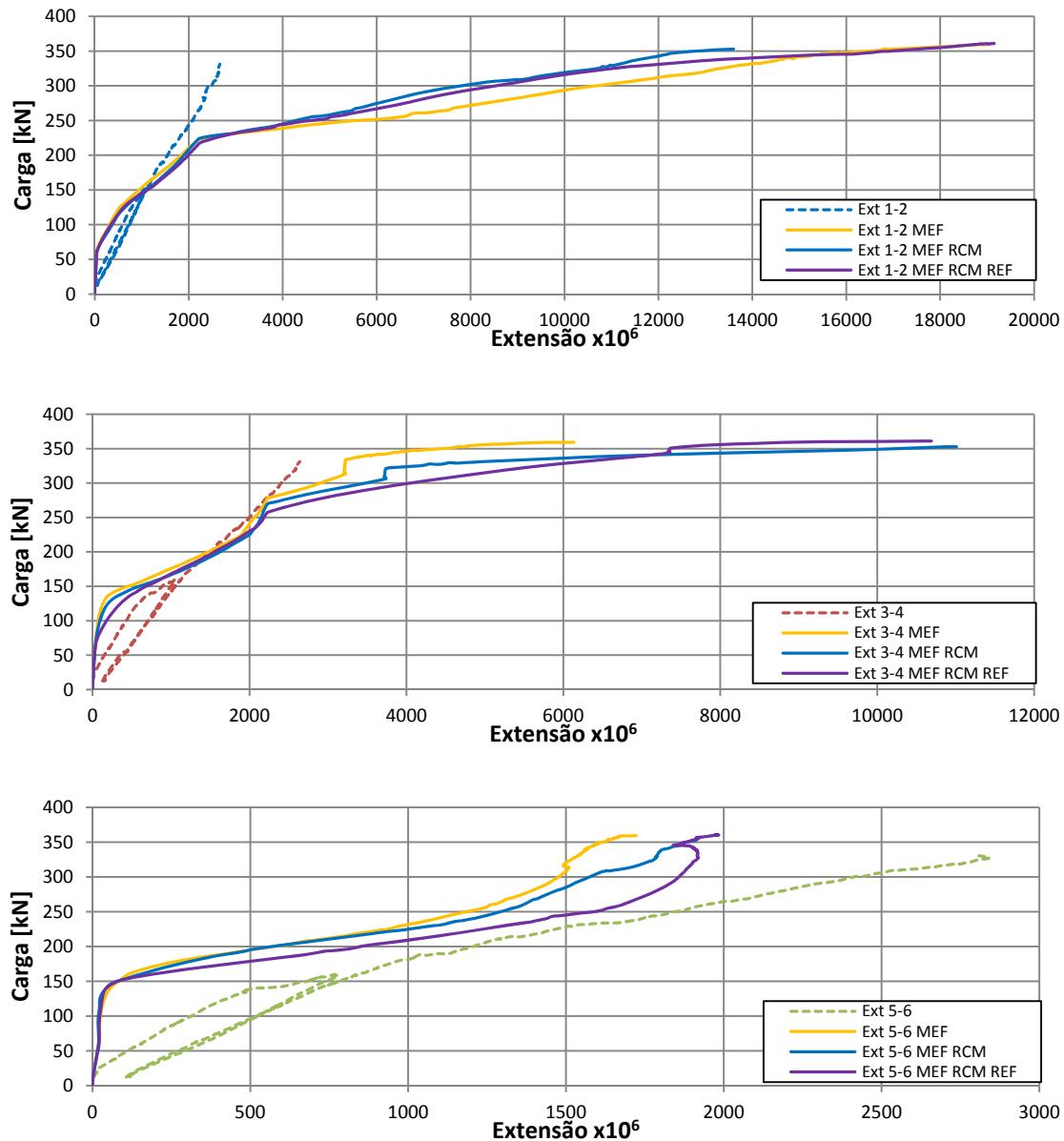


Figura 5-39 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID3 e comparação com modelo experimental, por extensómetro

Para o modelo ID3, a evolução das extensões nas armaduras é prevista com moderada aproximação pelos modelos numéricos. Os troços elásticos são sobreestimados pelos modelos numéricos, obtendo sempre o início de fendilhação para cargas superiores às obtidas experimentalmente.

O modelo numérico previu ainda a cedência dos dois varões correspondentes aos extensómetros mais interiores, o que não está de acordo com o obtido experimentalmente.

Há ligeiras diferenças nos resultados para as extensões na rotura no extensómetro 1-2, onde o modelo RCM obtém extensões menores, e no extensómetro 3-4 onde o primeiro modelo obteve extensões menores.

O varão instrumentado mais exterior, correspondente ao extensómetro 5-6 é muito pouco solicitado inicialmente, o que levou a um declive muito elevado na evolução da extensão com a carga aplicada. No decorrer do carregamento, o declive atinge um valor semelhante ao dos extensómetros experimentais.

O modelo que utiliza o RCM e o refinamento da malha apresenta um comportamento ligeiramente diferente no extensómetro 5-6 para cargas próximas da rotura, cerca de 343 kN, havendo um decréscimo das extensões seguido de um novo aumento das extensões. Isto também é visível na evolução dos deslocamentos, onde há um ligeiro patamar horizontal. Este comportamento já foi documentado em alguns ensaios experimentais, tendo sido justificado pela forte fendilhação na zona do extensómetro perto da rotura [17].

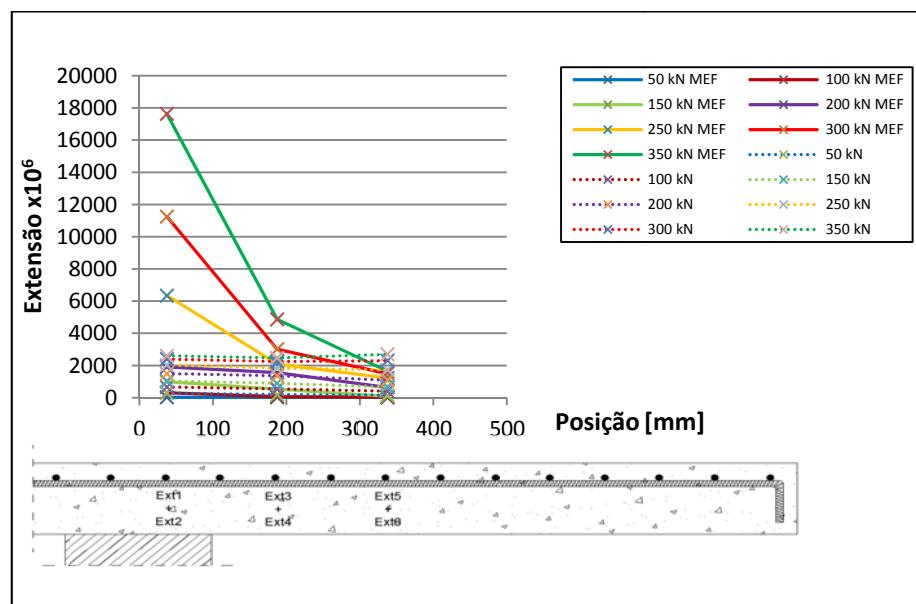


Figura 5-40 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID3 (corte E-O)

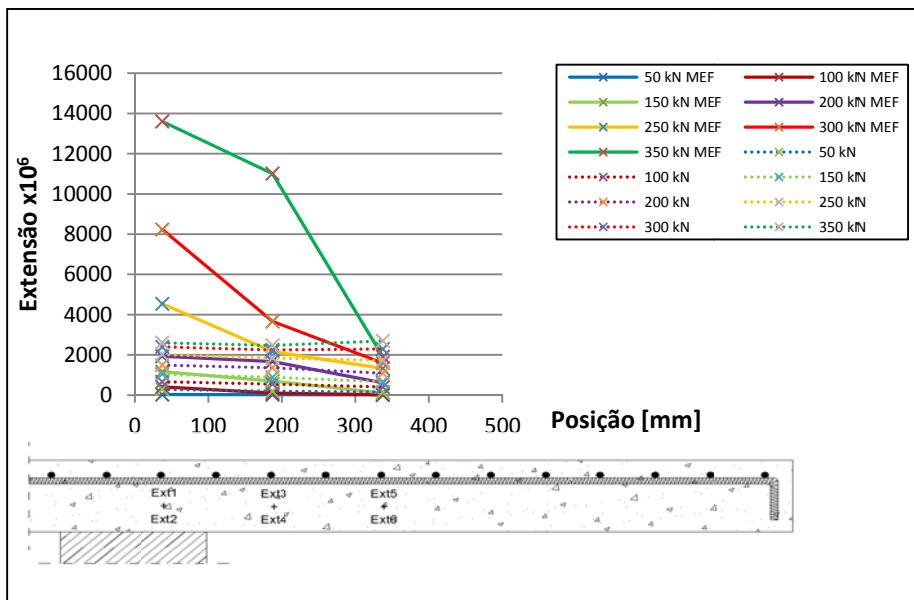


Figura 5-41 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID3 RCM (corte E-O)

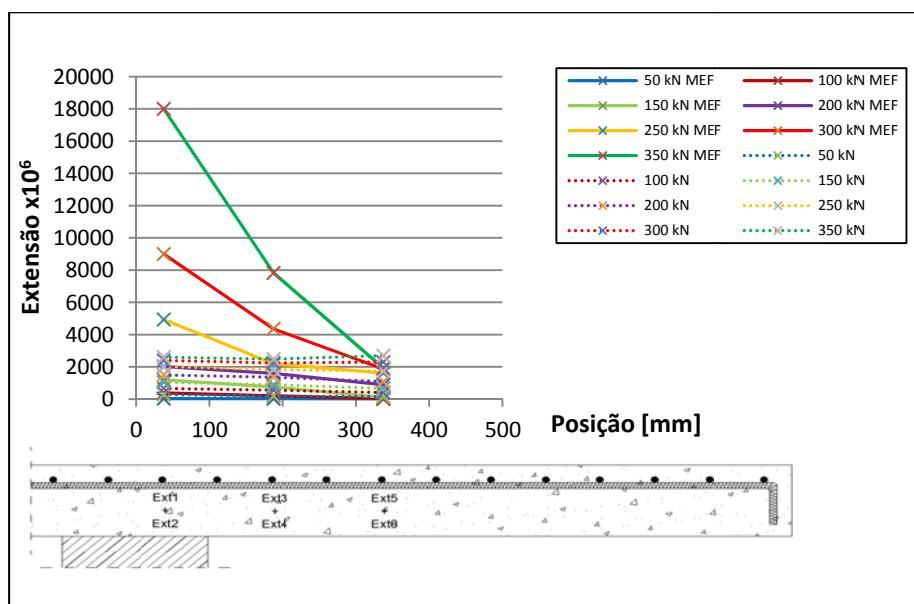


Figura 5-42 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID3 RCM Refinado (corte E-O)

A distribuição transversal das extensões demonstra a disparidade dos resultados de todos os modelos para cargas acima dos 200 kN, e para os extensómetros mais perto da zona de carregamento. As diferenças devem-se à cedência dos varões mais interiores para os patamares superiores a 200 kN.

Tal como na evolução das extensões, a distribuição transversal demonstra as diferenças entre os modelos das extensões na rotura.

### 5.3.4 Laje ID4

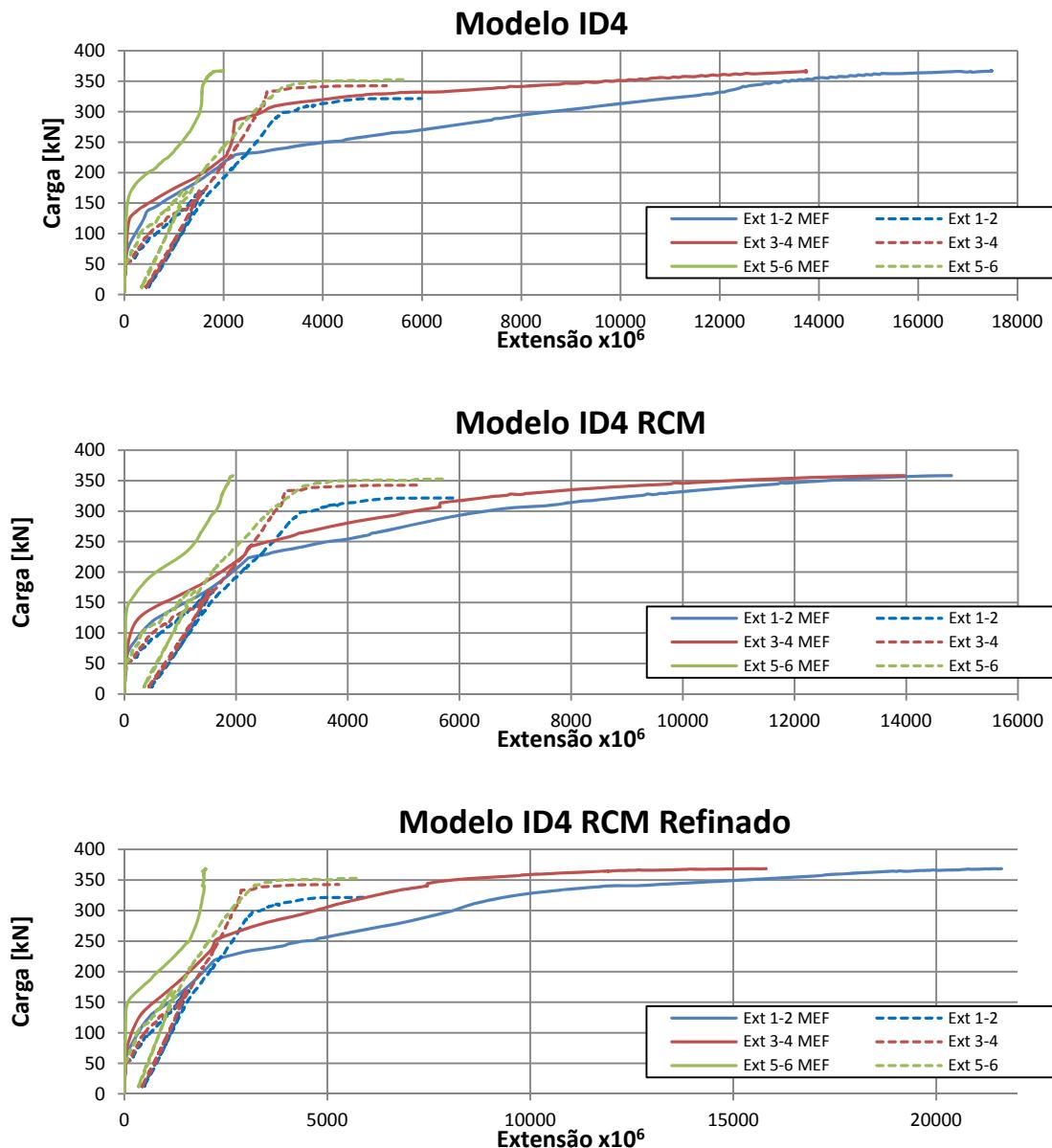


Figura 5-43 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID4 e comparação com modelo experimental

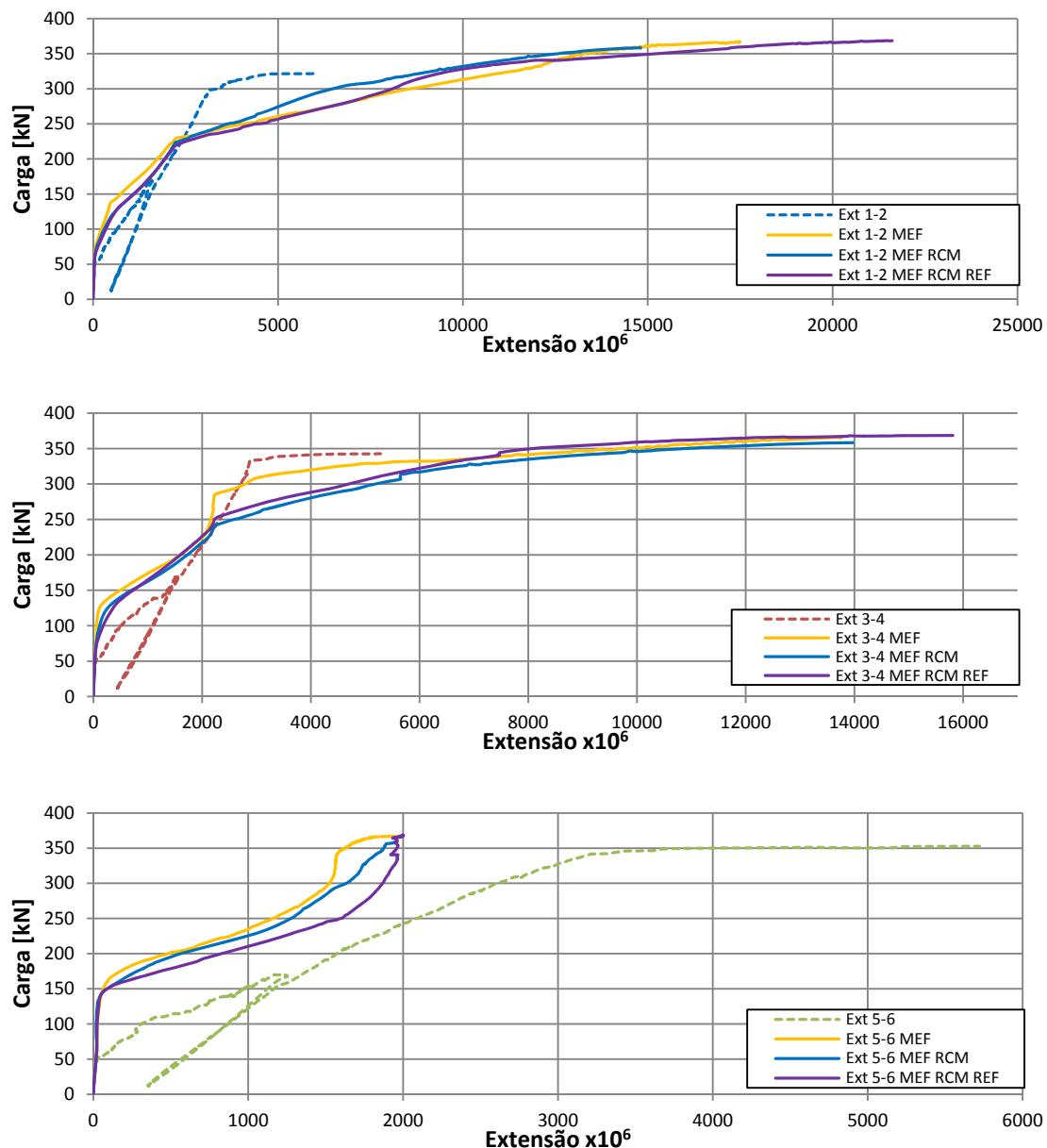


Figura 5-44 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID4 e comparação com modelo experimental, por extensómetro

Para o modelo ID4 foram obtidos resultados satisfatórios.

Os troços elásticos iniciais estão ligeiramente sobreestimados para os varões mais interiores e muito sobreestimados para o varão exterior. Os dois varões mais interiores entraram em cedência, para cargas de 225 kN no extensómetro 1-2, e cargas de 240 kN a 270 kN para o varão do extensómetro 3-4. O varão mais exterior esteve perto da cedência, ao atingir uma extensão de cerca de  $2000 \times 10^{-6}$ .

A utilização do RCM introduz uma diferença grande no extensómetro 3-4, prevendo uma maior carga para a cedência do varão.

Estes resultados eram esperados, visto que nos ensaios experimentais todos os varões entraram em cedência, apesar de o fazerem para cargas ligeiramente superiores. Por este facto, não foi possível analisar as extensões para o carregamento para cargas superiores a 350 kN pois a leitura dos extensómetros nos modelos experimentais parou, devido a limitações técnicas dos extensómetros.

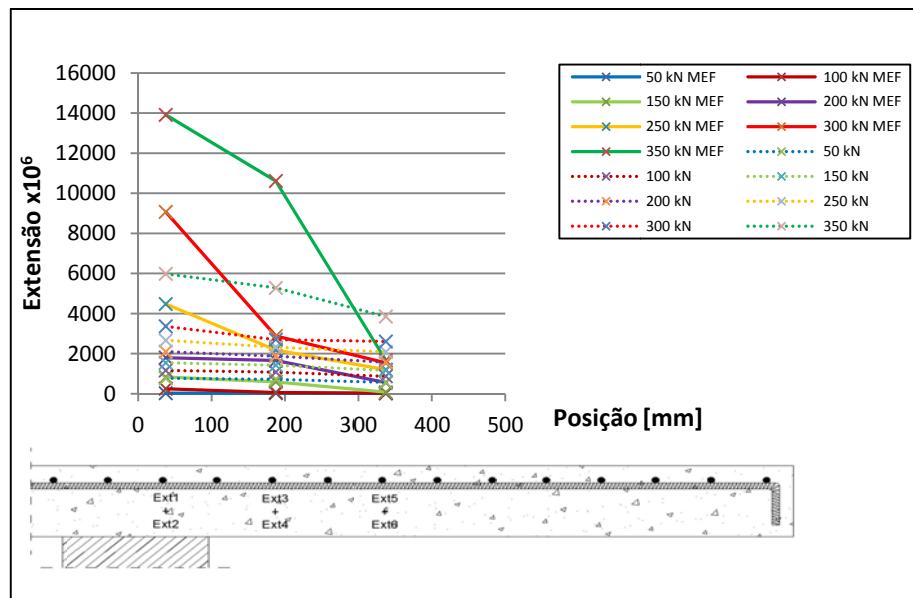


Figura 5-45 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID4 (corte E-O)

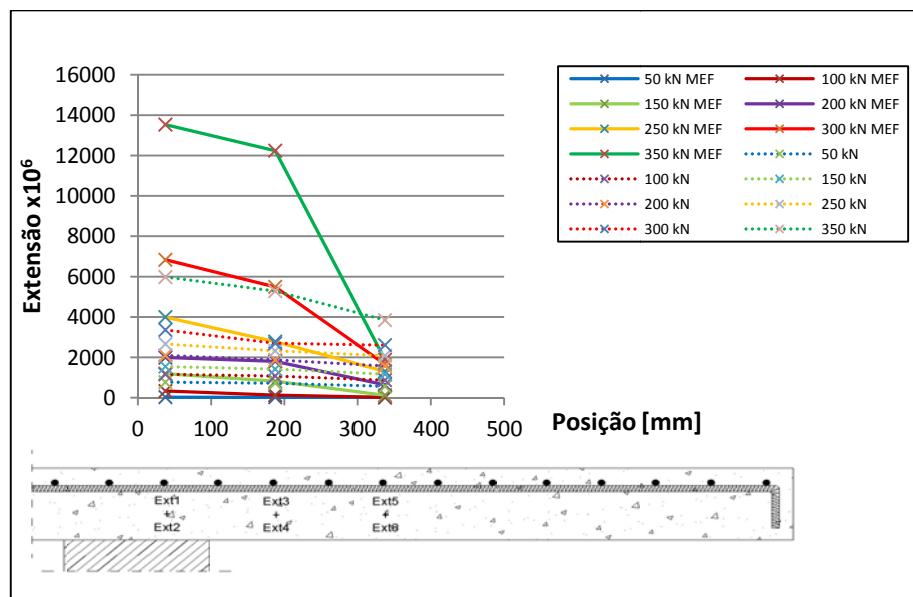


Figura 5-46 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID4 RCM (corte E-O)

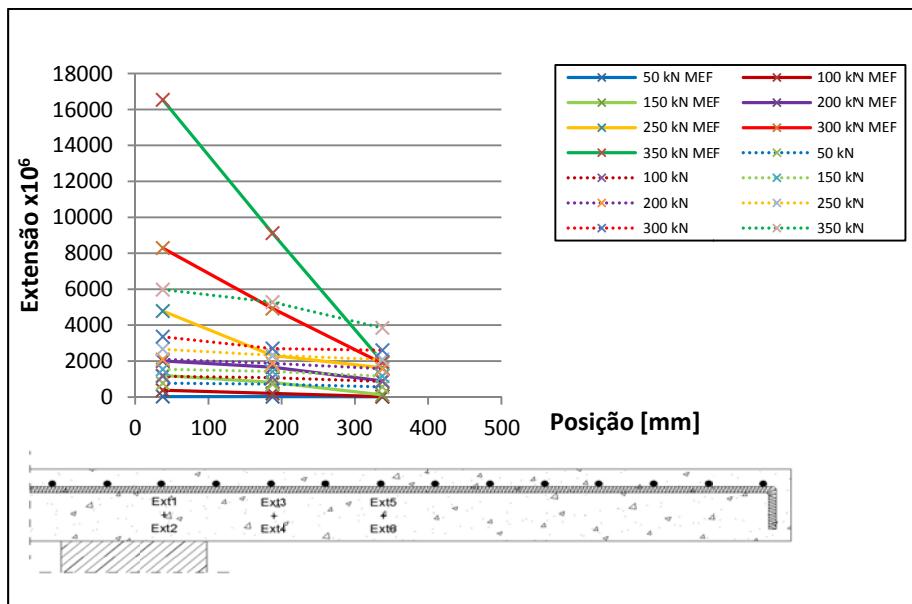


Figura 5-47 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID4 RCM Refinado (corte E-O)

Para todos os modelos é possível observar na distribuição transversal a correcta previsão de maiores extensões no extensómetro 1-2, correspondentes ao varão mais interior, apesar da clara sobreestimação do valor da extensão para os mesmos patamares de carga. Observa-se também a correcta previsão dos valores do extensómetro 3-4 e a clara subestimação dos valores do extensómetro 5-6.

De novo, é possível observar a diferença obtida nos diferentes modelos para extensómetro 3-4.

### 5.3.5 Laje ID5

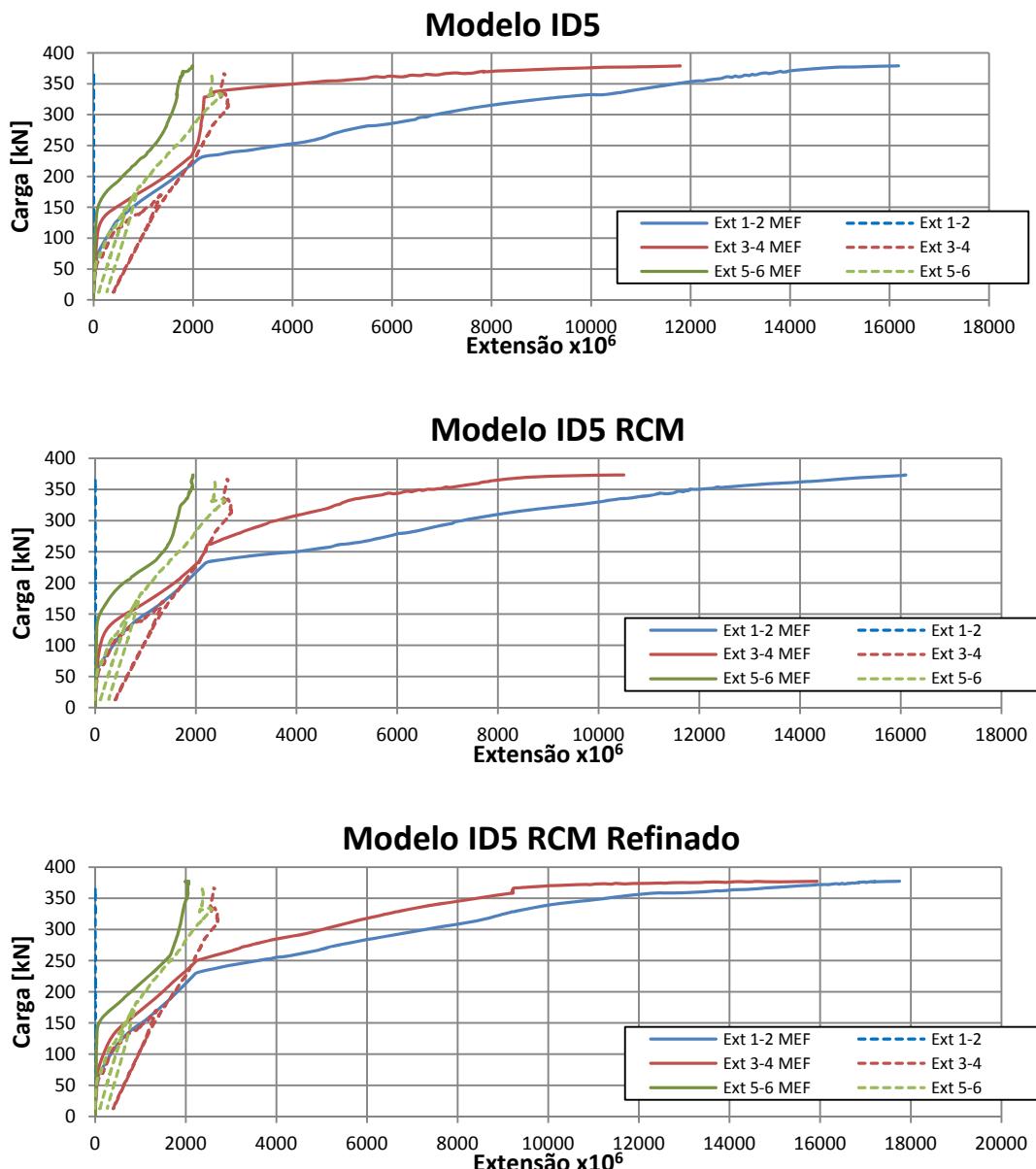


Figura 5-48 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID5 e comparação com modelo experimental

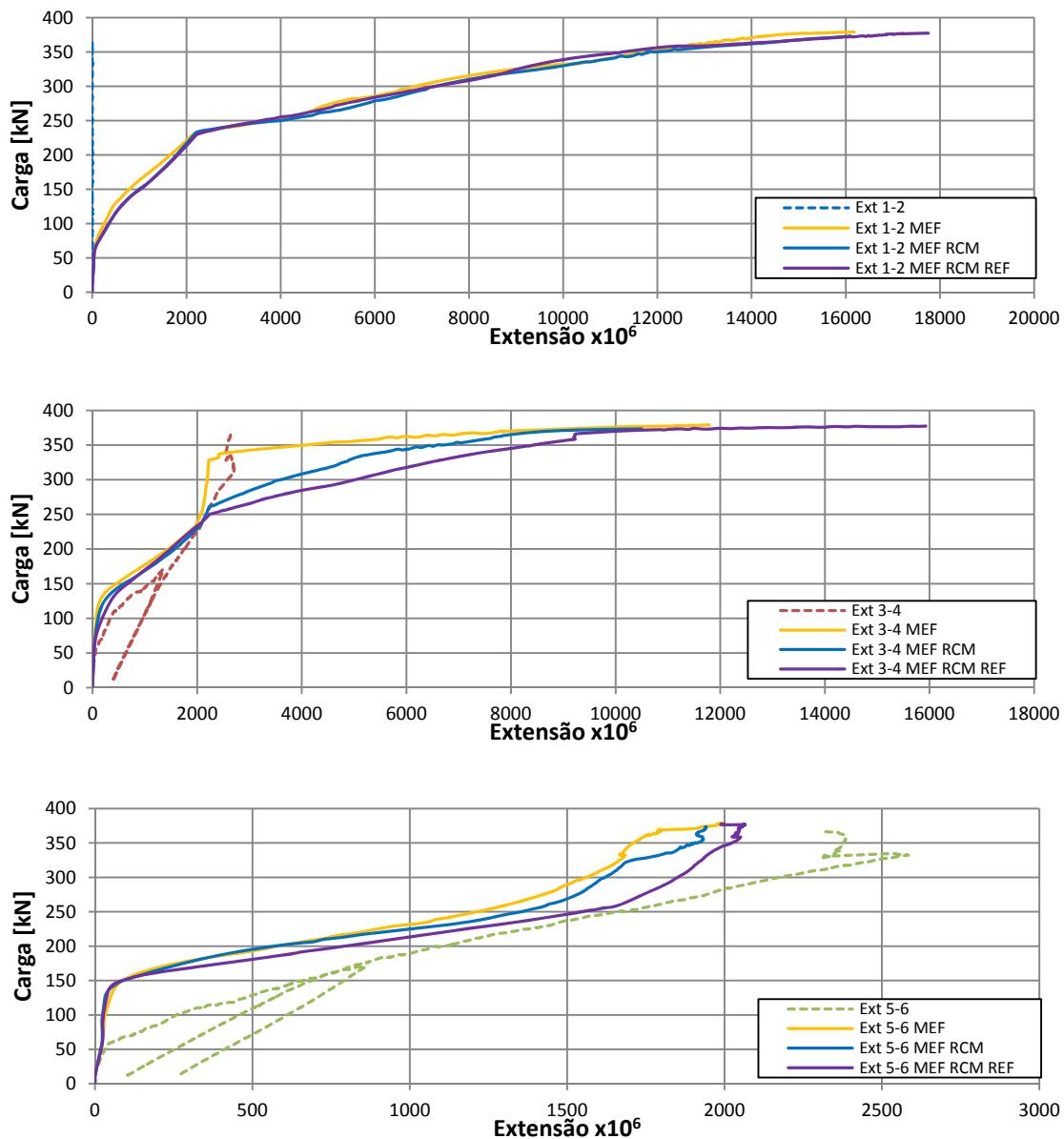


Figura 5-49 – Evolução das extensões nas armaduras nos modelos numéricos da laje ID5 e comparação com modelo experimental, por extensómetro

Neste modelo não estão disponíveis os dados experimentais do extensómetro 1-2 pelo facto de o extensómetro ter ficado danificado na betonagem da laje.

A previsão das extensões para a laje ID5 foi boa, obtendo os resultados com pequeno erro para o extensómetro 3-4, e de algum erro para o extensómetro 5-6.

Os troços elásticos foram sobreestimados pelo modelo numérico para todos os extensómetros, ligeiramente para os extensómetros dos varões mais interiores, e com erro considerável para o extensómetro do varão mais exterior.

Os modelos numéricos previram a cedência dos varões dos extensómetro 1-2 e 3-4, apesar de o resultado experimental não o comprovar. Há uma ligeira diferença entre os modelos nos resultados obtidos para o extensómetro 3-4, relativos à carga para a qual o varão entra na cedência, onde o primeiro modelo obtém um valor bastante mais alto que os restantes.

O varão do extensómetro 5-6 é pouco solicitado inicialmente para qualquer um dos modelos utilizados, até uma carga de cerca de 150 kN, valor após o qual começa a aproximar das extensões obtidas experimentalmente. No extensómetro 5-6, tanto os resultados experimentais, como os numéricos, apresentam uma ligeira perturbação perto da rotura, o que foi justificado pela forte fendilhação para valores próximos da rotura [17].

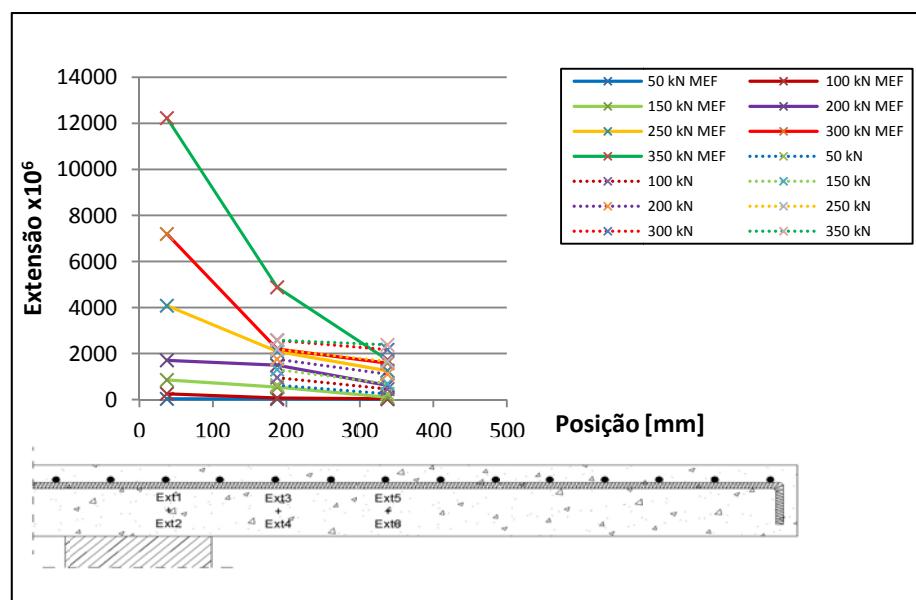


Figura 5-50 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID5 (corte E-O)

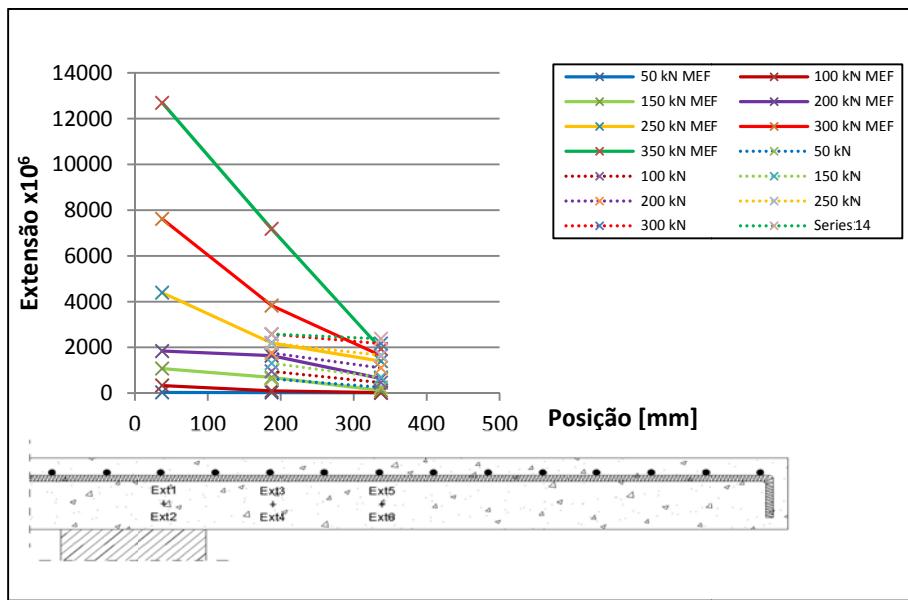


Figura 5-51 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID5 RCM (corte E-O)

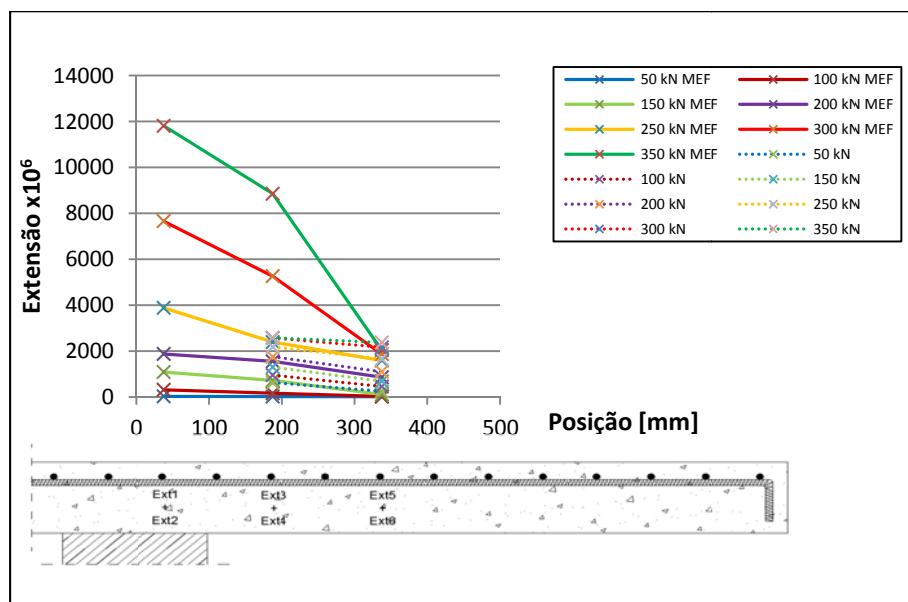


Figura 5-52 – Distribuição transversal das extensões, modelo ID5 RCM Refinado (corte E-O)

A distribuição transversal volta a mostrar a disparidade de resultados no varão mais interior para os mesmos patamares de carga, especialmente para os patamares próximos da rotura. É possível também observar as diferenças entre os modelos para o extensómetro 3-4 nos patamares de 300 kN e 350 kN.

### 5.3.6 Observações

Através da análise dos dados obtidos observou-se que a introdução do RCM pode ter alguma influência na evolução das extensões em função do carregamento aplicado, fazendo variar a carga da laje para a qual os varões entram em cedência. O RCM tem também maior influência nos modelos mais refinados, como é possível observar nos modelos da laje ID1.

Algumas alterações dos declives das relações carga-extensão podem ser justificadas no troço inicial pelo final do patamar elástico, ao ser atingido o valor do momento crítico, correspondente ao ser atingida a resistência de tracção do betão na face superior da laje.

Nos seguintes troços é possível verificar alterações nos declives aquando da cedência de outros varões, sendo apenas possível verificá-lo para os varões instrumentados, mas certamente também são influenciados pelos varões não instrumentados e os varões na direcção perpendicular, pois apenas foi instrumentado um a cada dois varões da armadura superior numa das direcções.

A distribuição transversal de extensões de todos os modelos reforçados, ID2 a ID5 apresenta valores muito superiores aos obtidos pelos modelos numéricos para cargas inferiores a 160 kN, isto justifica-se pelo facto de que, para essas cargas, as extensões utilizadas para elaboração dos gráficos correspondem à segunda fase do carregamento, pelo que no modelo experimental já estão afectadas pelas extensões residuais, e no modelo numérico não. Foi ignorado este facto pois só se verifica para cargas na laje baixas, e ao proceder-se com o carregamento na segunda fase as extensões recuperam elasticamente, anulando esse efeito.

## 5.4 Evolução da carga nos parafusos

A evolução da carga nos parafusos, apenas nas lajes reforçadas, foi monitorizada através de extensómetros colocados na zona central dos parafusos. Para a obtenção da força correspondente foram utilizados os diagramas tensão-deformação obtidos dos ensaios à tracção dos parafusos utilizados.

Existem diferenças iniciais da evolução da força nos parafusos que resultam do facto de no modelo numérico terem sido utilizados os valores médios do aperto nos parafusos, enquanto nos resultados experimentais foram utilizados os resultados obtidos do aperto.

O pré-esforço inicial tem variações mínimas face ao valor médio experimental, pelo facto de ter sido utilizada temperatura para simular a extensão inicial do parafuso devida ao pré-

esforço, associada a um diagrama tensão deformação multilinear, o que provocou ligeiros erros.

Nos gráficos que se apresentam em seguida são indicadas, para além da carga nos parafusos, duas linhas horizontais a traço interrompido, que correspondem à força de cedência e à força de rotura dos parafusos de reforço.

#### 5.4.1 Laje ID2

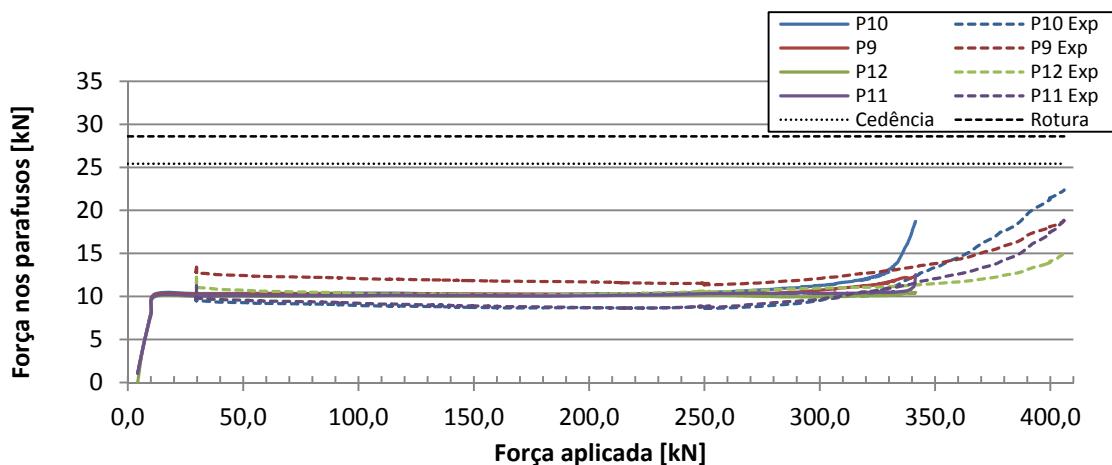


Figura 5-53 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID2

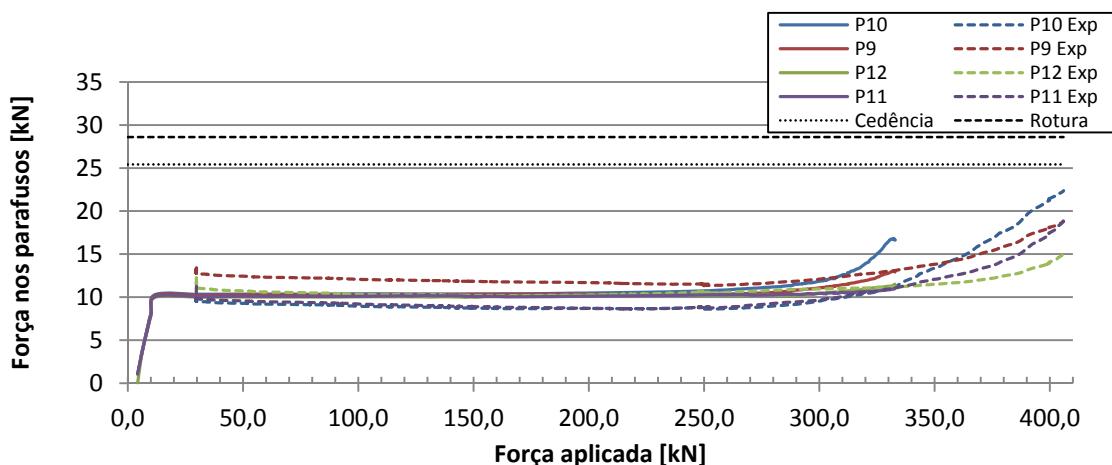


Figura 5-54 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID2 RCM

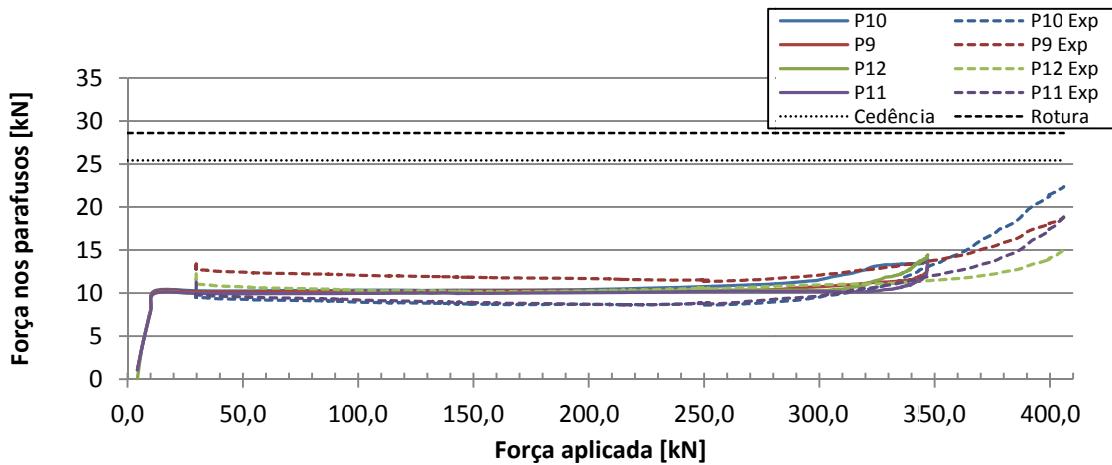


Figura 5-55 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID2 RCM Refinado

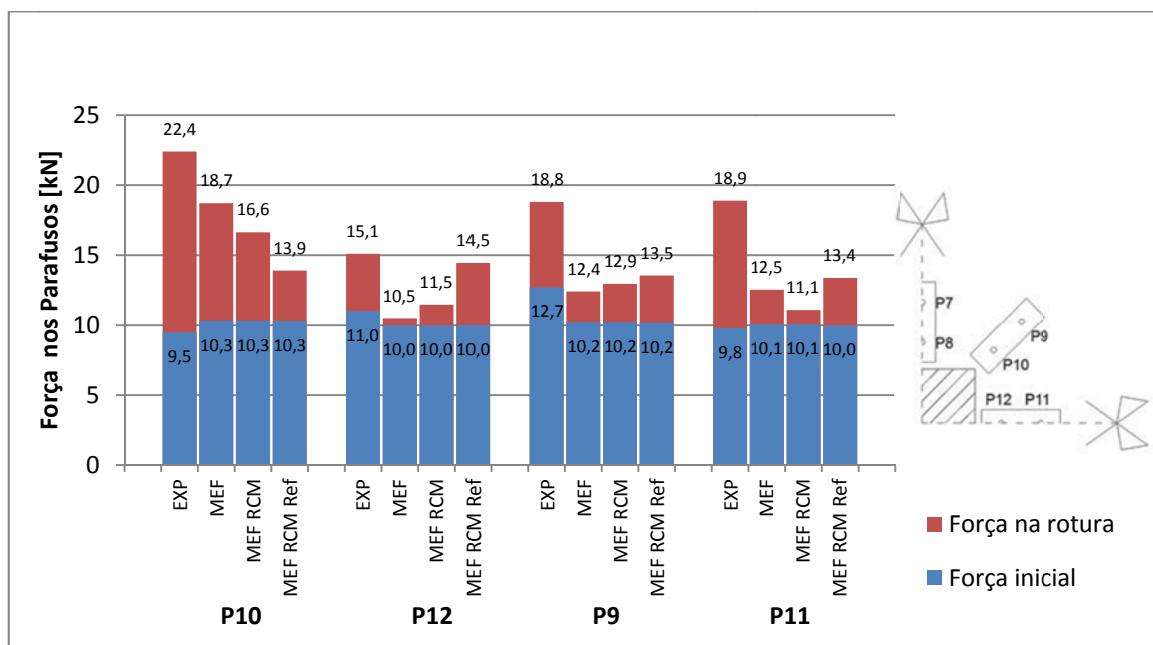


Figura 5-56 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID2

A modelação numérica resultou numa previsão para a força nos parafusos de reforço bastante próxima da obtida experimentalmente. Tanto nos modelos numéricos como nos modelos experimentais a força nos parafusos manteve-se constante no início do carregamento, tendo esta começado a sofrer incrementos mais acentuados a partir de cerca de 300 kN de carga vertical aplicada.

No geral, os modelos previram uma maior carga nos parafusos da diagonal, o P10 e o P9, tal como o verificado no ensaio experimental.

A introdução do RCM e a alteração do refinamento da malha trouxeram ligeiras variações na solicitação dos parafusos ao longo do carregamento, sendo mais significativas na rotura, onde cada modelo apresentou diferentes valores da carga nos parafusos.

Nenhum dos parafusos cedeu, quer no modelo experimental, quer nos modelos numéricos.

#### 5.4.2 Laje ID3

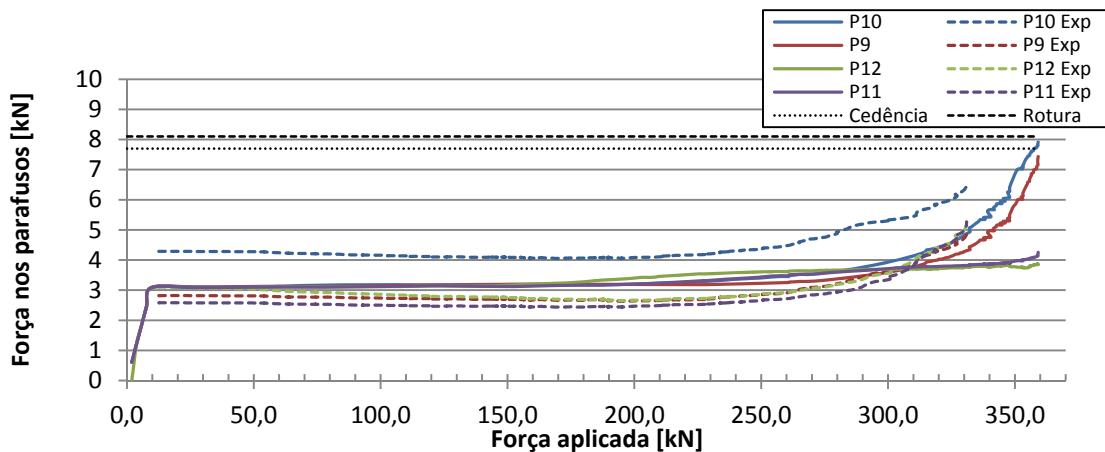


Figura 5-57 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID3

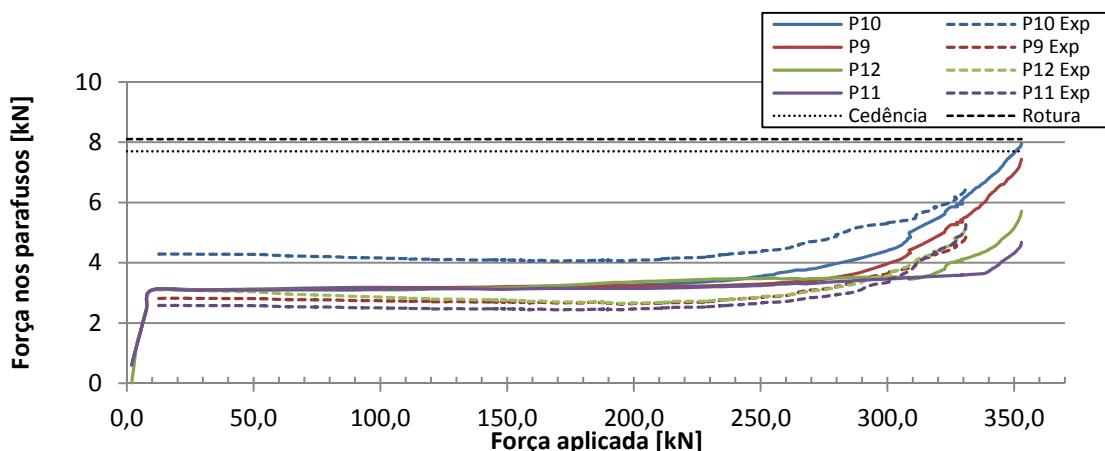


Figura 5-58 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID3 RCM

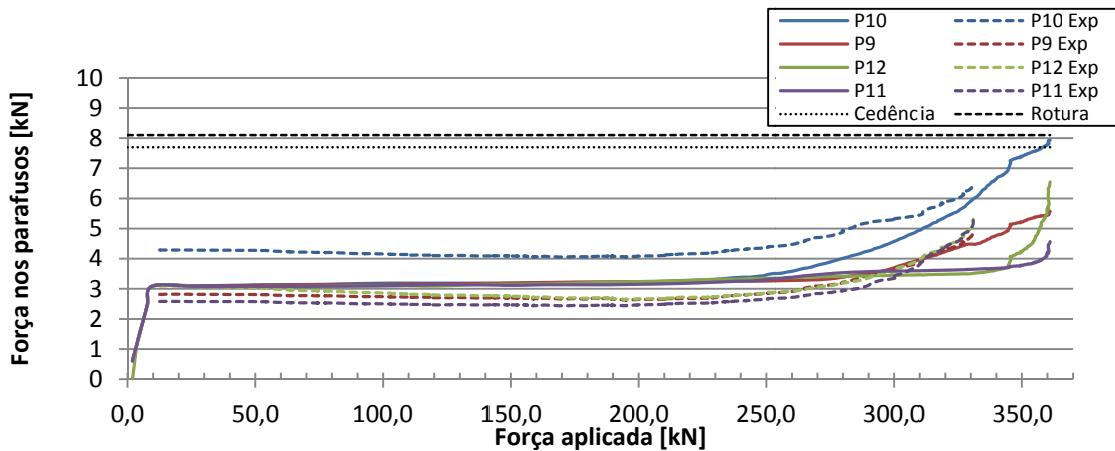


Figura 5-59 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID3 RCM Refinado

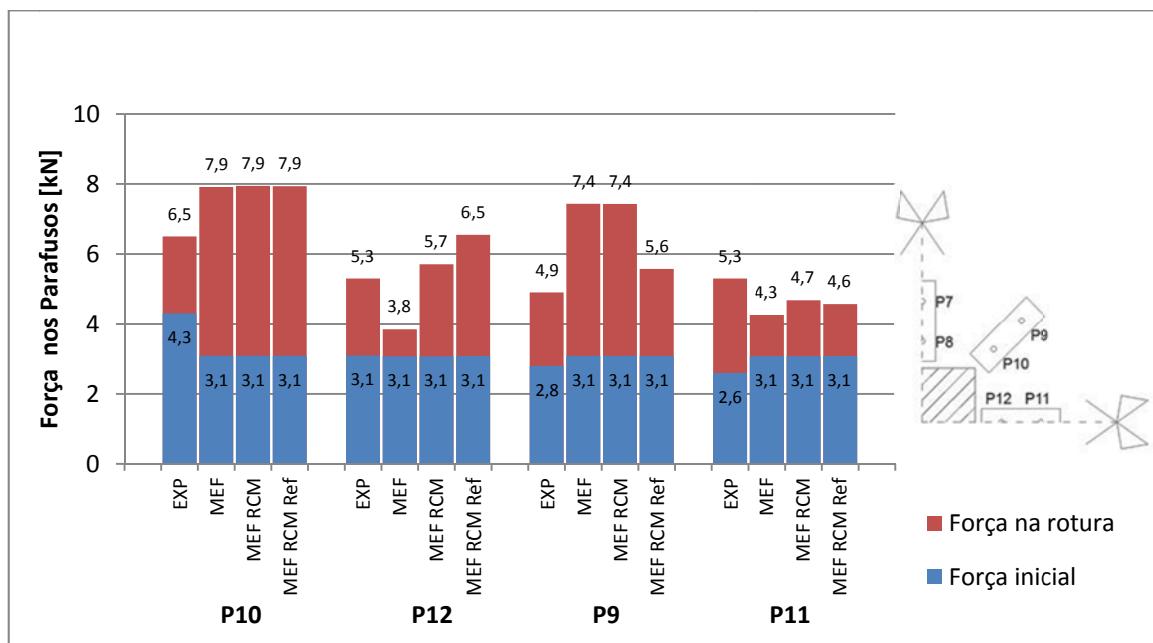


Figura 5-60 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID3

Nos modelos da laje ID3 a solicitação dos parafusos ocorreu de forma semelhante à obtida experimentalmente, verificando-se incremento de força nos parafusos para uma carga de cerca de 200 kN. O comportamento descrito para os ensaios experimentais é seguido da rotura de todos os parafusos o que resultaria nos passos seguintes numa pequena recta vertical nas figuras que mostram a evolução da força nos parafusos.

A utilização do RCM e do refinamento da malha de elementos finitos resultou numa solicitação mais suave, assim como numa maior solicitação dos parafusos P11 e P12 na rotura.

A força dos parafusos na rotura foi prevista pelos modelos numéricos com um erro aceitável.

#### 5.4.3 Laje ID4

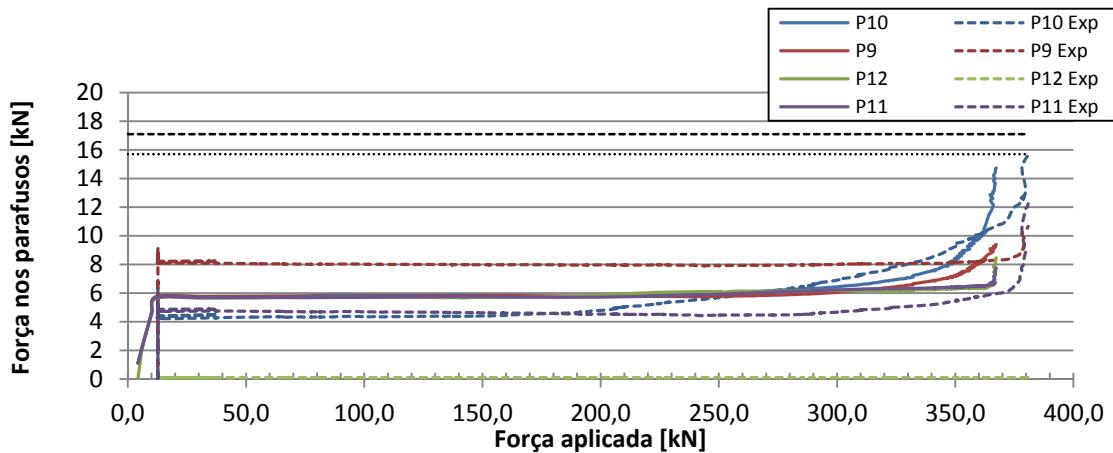


Figura 5-61 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID4

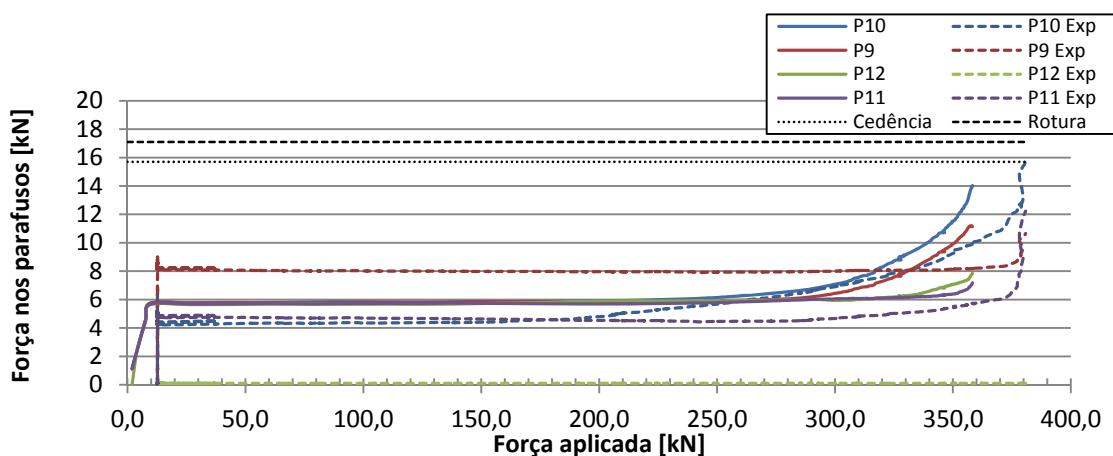


Figura 5-62 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID4 RCM

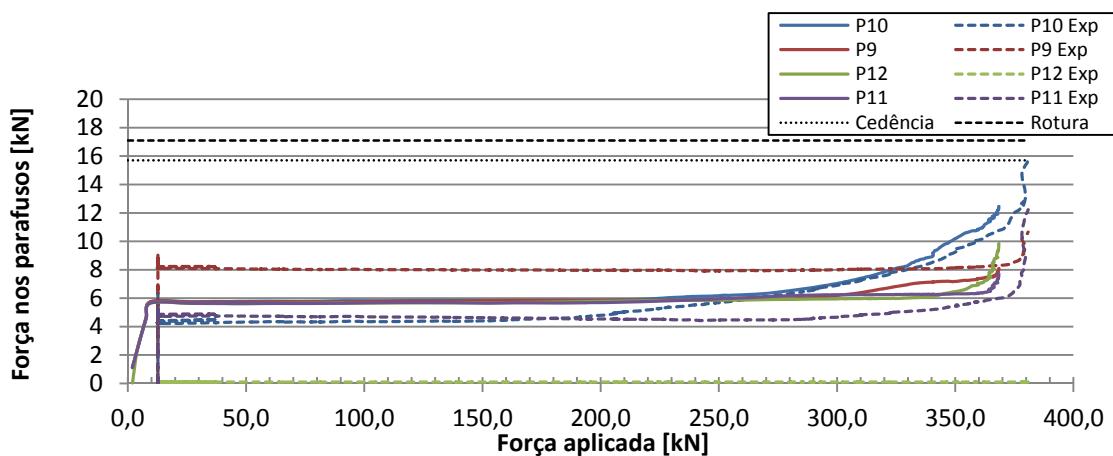


Figura 5-63 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID4 RCM Refinado

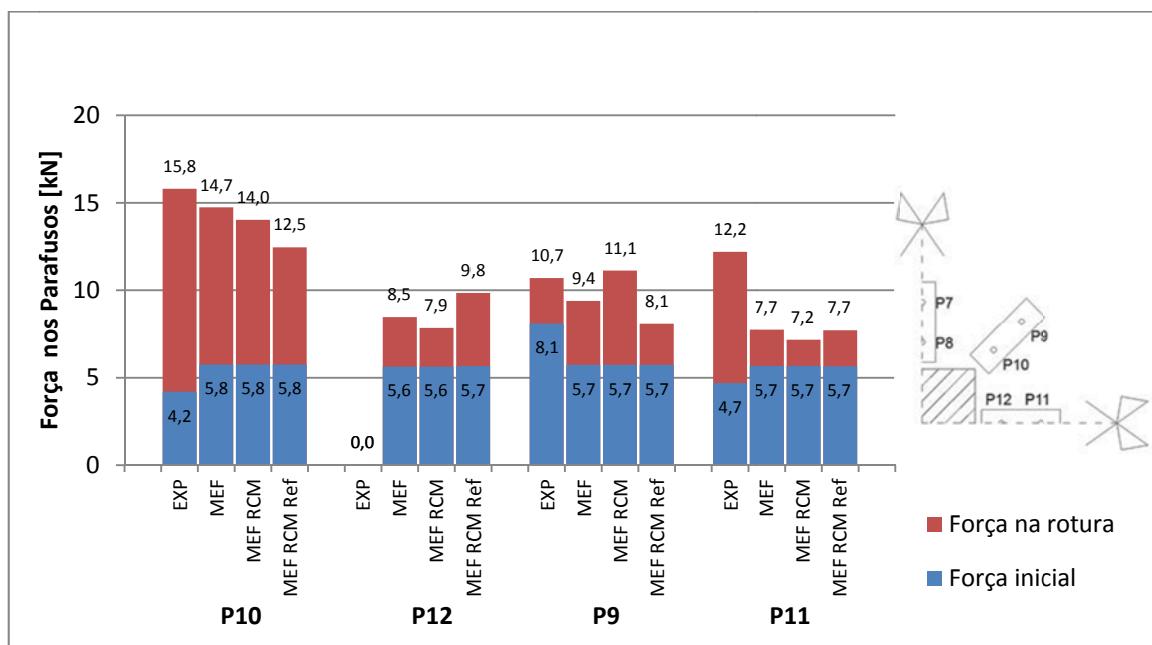


Figura 5-64 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID4

Os resultados experimentais do parafuso P12 não estão disponíveis pelo facto de os extensómetros terem ficado danificados.

Os modelos numéricos da laje ID4 obtiveram um comportamento muito semelhante ao experimental, com o parafuso P10 a ser o primeiro a ser solicitado, tendo todos os parafusos carregamentos bruscos perto da rotura da laje, resultando em cargas na rotura semelhantes às obtidas experimentalmente.

A utilização do RCM e de um maior refinamento da malha resultaram numa solicitação prematura e suave dos parafusos, obtendo ainda assim resultados aceitáveis.

A força dos parafusos na rotura apenas não foi bem prevista para o parafuso P11, para o qual todos os modelos subestimaram a carga na rotura.

#### 5.4.4 Laje ID5

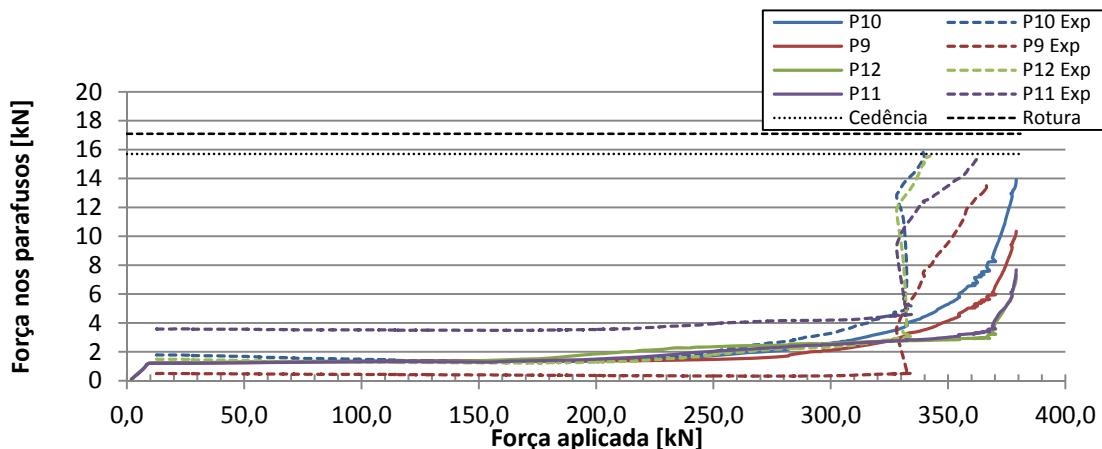


Figura 5-65 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID5

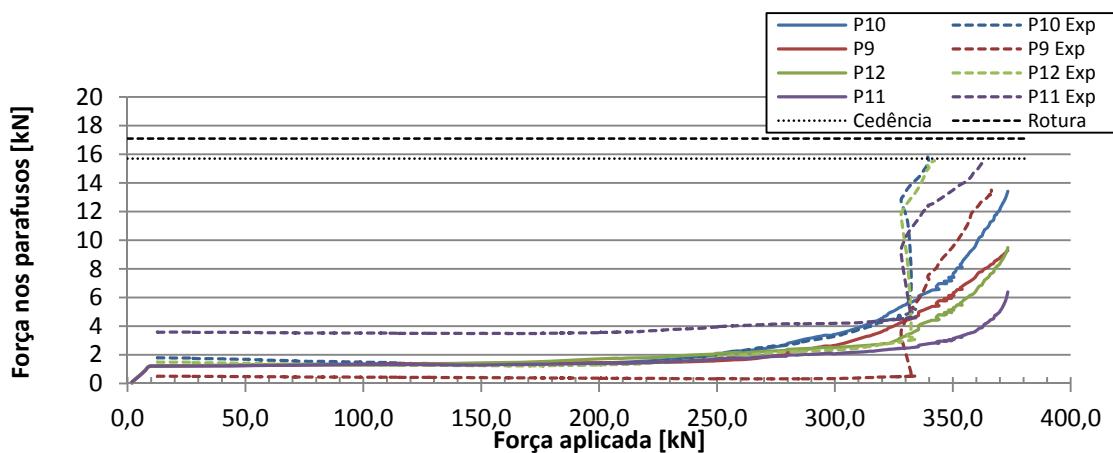


Figura 5-66 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID5 RCM

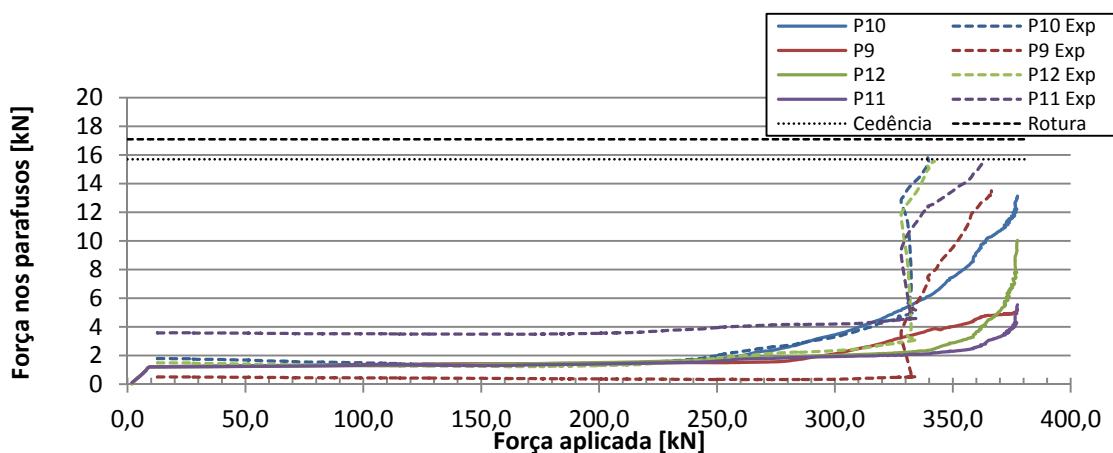


Figura 5-67 – Evolução da força nos parafusos no modelo ID5 RCM Refinado

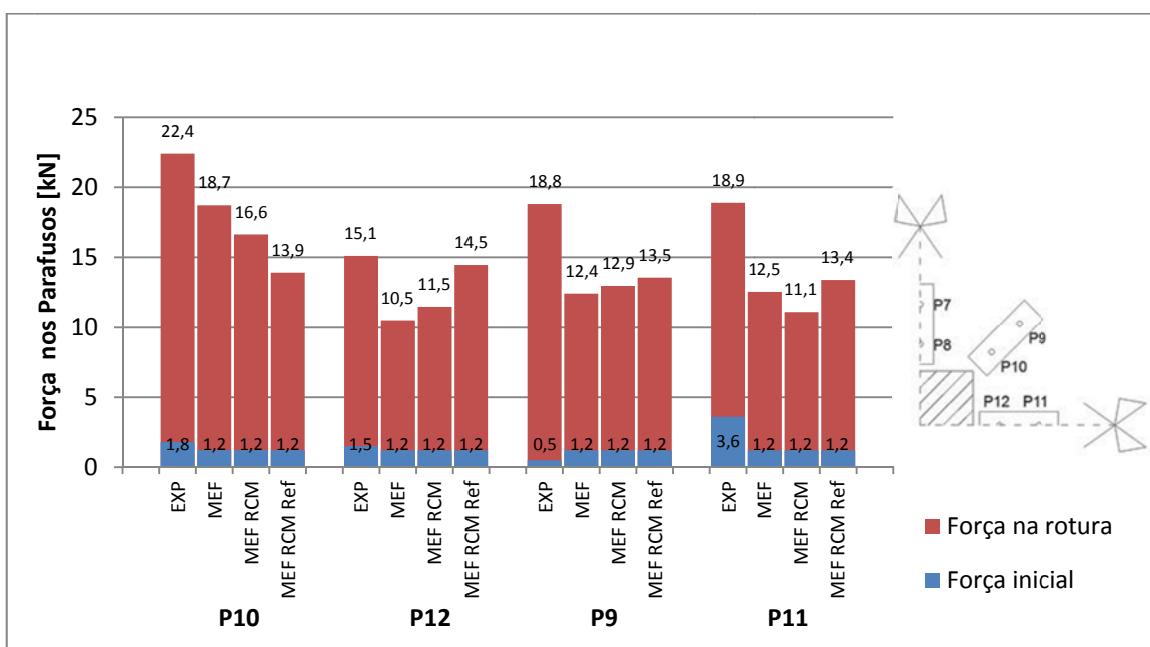


Figura 5-68 – Forças iniciais e na rotura dos parafusos nos modelos da laje ID5

O modelo experimental da laje ID5, pela presença de menor pré-esforço nos parafusos, obteve solicitações mais bruscas quando a laje se encontra próxima da carga de rotura, apesar de a solicitação começar para cerca de 200 kN com variações mínimas da força nos parafusos. A solicitação brusca é muito evidente nos ensaios experimentais, mas não o é tanto nos modelos numéricos, sendo mais visível nos parafusos P11 e P12.

De forma semelhante aos modelos anteriores, a introdução do RCM e de uma maior refinamento da malha traz um carregamento mais suave dos parafusos, assim como uma maior solicitação dos parafusos P11 e P12 para menores cargas, e também perto da rotura da laje.

A força dos parafusos na rotura neste modelo é subestimada para todos os parafusos nos modelos numéricos.

#### 5.4.5 Observações

A comparação da evolução da força nos parafusos com a força aplicada na laje, e a comparação da força nos parafusos na rotura é difícil, principalmente pelas variações no aperto inicial dos parafusos, mas também pelas diferenças na carga de rotura das lajes. O diferente aperto para os parafusos do mesmo modelo foi apenas considerado nos ensaios experimentais, tendo sido utilizada nos modelos numéricos a média dos valores medidos

inicialmente nos modelos experimentais. Isso pode ter pouca influência na carga de rotura da laje, mas tem influência nas comparações com os resultados da força nos parafusos obtidas numericamente.

Apesar dessas dificuldades, o modelo numérico conseguiu prever a baixa solicitação dos parafusos para pequenas cargas na laje, tendo a força nos parafusos subido incrementalmente para cargas mais altas, todas acima de 200 kN.

Verificou-se também que o refinamento da malha de elementos finitos alterou ligeiramente a solicitação dos parafusos. Apesar de só o fazer para valores de carga próximos da rotura, todos os modelos apresentaram alterações na solicitação dos parafusos aquando do refinamento da malha de elementos finitos, pois ao refinar a malha, o modelo numérico passou a solicitar mais os parafusos nas direcções E-O, nomeadamente os parafusos P11 e P12, e pelo contrário, solicitam menos o parafuso exterior da diagonal, nomeadamente o parafuso P9.

## 6 CONCLUSÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões Finais

Com o decorrer das análises, foram tiradas algumas conclusões de opções das quais se obtiveram resultados piores para os modelos pretendidos.

Uma dessas opções assenta no refinamento da malha de elementos finitos utilizada com base em *bricks*, na zona do cone de punçoamento, de modo a obter melhor percepção e definição da rotura por punçoamento. Esta opção resultou para os modelos não reforçados, pois a solicitação à flexão da laje ainda está longe da solicitação para a qual foi dimensionada. Ao se proceder com o carregamento das lajes reforçadas, para cargas um pouco superiores às da laje de referência, aparecem extensões exageradas no interface entre a zona refinada e a zona não refinada, eventualmente prevendo a rotura por esse interface. As razões para tal acontecer devem-se à alteração brusca de rigidez da laje, e ao desprezo de alguns graus de liberdade, ao não ser dada continuidade da malha de elementos finitos.

Outra opção é a utilização dos diagramas das armaduras longitudinais iguais aos obtidos no ensaio à tracção realizados em laboratório. Esta opção também obteve resultados erróneos, ao apresentar cargas de rotura menores, e deformações muito exageradas. As evoluções das extensões também apresentavam resultados piores do que os obtidos. Este facto pode ser explicado pela não consideração de alguns factores de interacção entre as armaduras e o betão, que provocam alterações na rigidez das armaduras, como por exemplo o *tension stiffening*. Tal facto foi compensado utilizando um modelo numérico para as armaduras que considera um módulo de elasticidade de 200 GPa, bastante superior ao valor obtido nos ensaios de tracção efectuados, mas mesmo assim, um valor comum no que diz respeito ao tipo de aço utilizado na construção.

A utilização do RCM ao invés do FCM traz melhorias apenas para um modelo mais refinado. No Quadro 5-3 foram apresentados os erros médios obtidos para todas as análises e verifica-se no geral que há menores erros no uso do modelo RCM refinado, mas não no modelo RCM não refinado. No entanto, foi recomendado pelos autores do *software* a utilização de valores da relação FCM/RCM entre 0,3 e 0,5.

A utilização do *software* como ajuda em projectos de estrutura pode ser efectuada, mas sempre com alguma margem de dúvida, e sempre que possível, confirmada por modelos,

possivelmente reduzidos, em laboratório. Ao ser utilizada, convém ter em conta os ensaios já efectuados, para ter alguma base de comparação nas cargas e nas deflecções obtidas.

Pela observação de todos os ensaios aqui efectuados, é possível observar uma boa aproximação na carga de rotura. Observa-se que a aproximação entre os resultados experimentais e os numéricos em termos de deformação é boa no início do carregamento, sendo de pior qualidade para cargas próximas da rotura, resultando em geral numa pequena subestimação para valores de carga baixos e numa sobreestimação nas deformações da laje para cargas próximas da rotura. Verifica-se também a boa aproximação da evolução da força nos parafusos em todos os casos.

## 6.2 Desenvolvimentos futuros

A realização deste trabalho teve como objectivo o acompanhamento através de modelos numéricos de ensaios do comportamento ao punçamento realizados na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, onde existem diversos ensaios já realizados, e resultados disponíveis.

Como tal, de forma a dar continuidade a estes estudos, sugerem-se alguns temas de interesse.

- Modelação numérica do comportamento de lajes reforçadas com parafusos pós-instalados, sujeitas a acções cíclicas.
- Modelação numérica do comportamento de lajes reforçadas com armadura transversal aderente pós-instalada, através da utilização de modelos Bond-Slip para as armaduras transversais.
- Modelação numérica do comportamento de lajes reforçadas com parafusos com diferentes condições de ancoragem dos mesmos.
- Estudo do comportamento e correspondente modelação numérica do reforço com parafusos de lajes fungiformes em pilares de bordo.
- Estudo experimental e numérico do efeito da variação do pré-esforço na armadura transversal em lajes fungiformes reforçadas.
- Estudo experimental e numérico do comportamento de lajes fungiformes reforçadas com parafusos, verificação do efeito da relação entre o vão e a espessura da laje no comportamento após reforço e respectiva previsão por modelos numéricos.
- Estudo da aplicação de reforços transversal, não aderente e aderente, em lajes fungiformes aligeiradas, e respectiva modelação numérica.

## REFERÊNCIAS

- [1] BAZANT, Z. P.; FELLOW; ASCE; CANER, F. C.; CAROL, I.; ADLEY, M. D.; AKERS, S. A. – **Microplane Model M4 for Concrete. I: Formulation With Work-conjugate Deviatoric Stress.** *Journal of Engineering Mechanics*, Setembro, 2000, p. 944-953.
- [2] BELAKHDAR, K. – **Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slab Strengthened with Shear Bolts.** *Jordan Journal of Civil Engineering*, Vol. 2, 2008.
- [3] BÉTON, Comité Euro-International du – **CEB-FIP Model Code 1990.** Lausanne: Thomas Telford Services, 1993.
- [4] BÉTON, Comité Euro-International du – **Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures Bulletin 45.** Lausanne, 2008.
- [5] BÉTON, Comité Euro-International du – **Punching of Structural Concrete Slabs Bulletin 12.** Lausanne, 2001.
- [6] BEUTEL, R.; HEGGER, J. – **Punching Shear Resistance of Shear Reinforced Flat Slabs.** 1998.
- [7] BIGAJ, A. J.; WALRAVEN, J. C. – **A Bond Model for Ribbed Bars in HSC and NSC - An Experimental Study.** Em *Fourth International Symposium on the Utilization of High Strength/ High Performance Concrete*, Paris, 1996, p. 1125-1134.
- [8] BRÆSTRUP, M. W.; NIELSEN, M. P.; JENSEN, B. C.; BACH, F. – **Axisymmetric Punching of Plain and Reinforced Concrete.** Copenhaga: Universidade Técnica da Dinamarca, 1976. Relatório.
- [9] CAROL; PRAT, P. C. – **A statically constrained microplane model for the smeared analysis of concrete cracking.** *International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Vol. 2, 1990, p. 919-930.
- [10] CEN – **Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios.** Caparica: Instituto Português da Qualidade, 2008.
- [11] CERVENKA, V. – **Computer Simulation of Failure of Concrete Structures for Practice.** Praga: Cervenka Consulting, 2009.

- [12] CERVENKA, V.; JENDELE, L.; CERVENKA, J. – **ATENA Program Documentation Part 1 - Theory**. Praga: Cervenka Consulting Ltd, 2009.
- [13] CISMASIU, C. – **Método dos Elementos Finitos**. Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2009. Texto de apoio às aulas.
- [14] COPE, R. J.; RAO, P. V.; CLARK, L. A.; NORRIS, P. – **Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs**. *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Vol. 1, 1980, p. 457-470.
- [15] DE BORST, R.; NAUTA, P. – **Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model**. *Engineering Computations*, Vol. 2, 1985, p. 35-46.
- [16] DE BORST, R.; REMMERS, J.; NEEDLEMAN, A.; ABELLAN, M. – **Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap**. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 28, Edição 7-8, 2004, p. 583-607.
- [17] DUARTE, I. O. – **Comportamento ao Punçamento de Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos**. Lisboa: Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, 2008. Dissertação de Mestrado.
- [18] EL-SALAKAWY, E.; SOUDKI, K.; POLAK, M. A. – **Punching Shear Behaviour of Flat Slabs Strengthened with Fiber Reinforced Polymer Laminates**. *Journal of Composites for Construction*, Vol. 8, Edição 5, Setembro, 2004, p. 384-392.
- [19] FIB – **Model Code 2010 Vol.2**. Lausanne, 2010.
- [20] GHALI, A.; SARGIOUS, M. A.; HUIZER, A. – **Vertical prestressing of flat plates around columns**. *Shear in Reinforced Concrete*, Vol. 45, 1974, p. 905-920.
- [21] HARAJLI, M. H.; SOUDKI, K.; KUDSI, T. – **Strengthening of Interior Slab-Column Connections Using a Combination of FRP sheets and Steel Bolts**. *Journal of Composites for Construction*, Vol. 10, Edição 5, Setembro, 2006, p. 399-409.
- [22] HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. – **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**. *CEMENT and CONCRETE RESEARCH*, Vol. 6, 1976, p. 773-782.

- [23] INÁCIO, R. A. – **Análise Numérica do Punçamento em Lajes Fungiformes**. Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2010. Dissertação de Mestrado.
- [24] INÁCIO, M. G. – **Comportamento ao Punçamento de Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos - Efeito da Área e Posicionamento da Ancoragem**. Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2010. Dissertação de Mestrado.
- [25] IPQ (INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE) – **NP EN 10002-1. Materiais metálicos. Ensaio de tracção Parte 1: Método de ensaio à temperatura ambiente**. Lisboa, 2006.
- [26] IPQ (INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE) – **NP EN 12390-1 - Ensaios do betão endurecido - Forma, dimensões e outros requesitos para o ensaio de provetes e para os moldes**. Lisboa, 2003.
- [27] IPQ (INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE) – **NP EN 12390-2 - Ensaios do betão endurecido - Execução e cura dos provetes para ensaios de resistência**. Lisboa, 2003.
- [28] IPQ (INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE) – **NP EN 12390-3 - Ensaios do betão endurecido - Resistência à compressão dos provetes de ensaio**. Lisboa, 2003.
- [29] JENDELE, L.; CERVENKA, J.; SAOUUMA, V.; PUKL, R. – **On the choice between discrete or smeared approach in practical structural FE analyses of concrete structures**. Em *Fourth International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation*, Glasgow, 2001, Cervenka Consulting Ltd.
- [30] KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. – **Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement**. *Transactions of the Royal Institute of Technology*, nº158, 1960, p. 112.
- [31] LEAL, J.; FRANCA, M. J. – **Modelos Reduzidos e Computacionais em Engenharia**. Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2010. Apontamentos Teóricos.
- [32] LUÍS, M. S. – **Punçamento cíclico de lajes fungiformes reforçadas com pré-esforço transversal**. Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2010. Dissertação de Mestrado.

- [33] MENÉTREY, P. – **Analytical Computation of the Punching Strength of Reinforced Concrete.** *ACI Structural Journal*, Vol. 93, Edição 5, 1996, p. 503-511.
- [34] MOE, J. – **Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings Under Concentrated Loads.** *Portland Cement Association, Research and Development Laboratories*, Vol. D47, 1961, p. 135.
- [35] MOST, T.; BUCHER, C. – **Application of the Fictitious Crack Model to meshless crack growth simulations.** Em *Simpósio Internacional IKM*, Weimar, 2003.
- [36] NGO, D.; SCORDELIS, C. – **Finite Element Analysis of Concrete Reinforced Beams.** *American Concrete Institute Journal*, Vol. 64, Edição 3, Março, 1967, p. 152-163.
- [37] OHMENHAUSER, F.; WEIHE, S.; KROPLIN, B. – **Algorithmic implementation of a generalized cohesive crack model.** *Computer Materials Science*, Vol. 16, 1999, p. 294-306.
- [38] OŽBOLT, J.; VOCKE, H. – **Numerical Analysis of Punching Failure.** Estugarda: Universidade de Estugarda, 1999.
- [39] RAMOS, A. P. – **Reparação e Reforço de Lajes Fungiformes ao Punçamento.** Lisboa: Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, 1995. Dissertação de Mestrado.
- [40] RAMOS, A. P.; LÚCIO, V. – **Estruturas de Betão Armado II.** Monte da Caparica: Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2009. Apontamentos Teóricos.
- [41] RASHID, Y. R. – **Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels.** *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, 1968, p. 334-344.
- [42] SHEHATA, I. A. E. M. – **Simplified Model for Estimating the Punching Resistance of Reinforced Concrete Slabs.** *Materials and Structures*, Vol. 23, 1990, p. 364-371.
- [43] STALLER, M. – **Analytical Studies and Numerical Analysis of Punching Shear Failure in Reinforced Concrete Slabs.** Em *International Workshop on Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs*, Estocolmo.
- [44] TALBOT, A. – **Reinforced concrete wall footings and column footings.** Universidade do Illinois, 1913. Bulletin 67.

- [45] TRAUTWEIN, L.; BITTENCOURT, T.; FARIA, R.; FIGUEIRAS, J.; GOMES, R. – **Axial symmetry analyses of punching shear in reinforced flat slabs.** *Measuring, Monitoring and Modeling Concrete Properties Part 1*, 2006, p. 139-144.
- [46] WEIHE, S.; KROPLIN, B.; DE BORST, R. – **Classification of Smeared Crack Models based on material and structural properties.** *International journal of solids and structures*, Vol. 35, Edição 12, 1998, p. 1289-1308.
- [47] ZIMMERMAN, T.; LI, Y. J. – **Numerical evaluation of the rotating crack model.** *Computers and Structures*, Vol. 69, 1998, p. 487-497.